

ANALISIS MODAL EN INTERACCION DINAMICA ESTRUCTURA -SUBSUELO

Jacobo Bielak* y Víctor J. Palencia*

INTRODUCCION

Recientemente se ha reconocido a la capacidad de deformación del suelo en la cimentación como un factor que debe tomarse en cuenta en el diseño de estructuras resistentes a temblores. En consecuencia, en los últimos años se han desarrollado varios métodos para analizar la respuesta dinámica de estructuras cimentadas en suelos flexibles, incluyendo aplicaciones del análisis de Fourier (3, 7, 8, 17), técnicas de transformada de Laplace (2, 7), el método de Foss (7), el método de elementos finitos (4, 5, 13, 15) y la integración directa de las ecuaciones de equilibrio por métodos numéricos paso-a-paso (10).

Probablemente, el método más usado en el análisis de sistemas lineales ante sollicitaciones transitorias sea el de superposición modal. En rigor, este método no es aplicable al estudio de la interacción suelo-estructura debido a que los coeficientes de rigidez y amortiguamiento de la cimentación dependen de la frecuencia

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, DF

y, por tanto, el sistema estructura-cimentación no posee modos normales clásicos. No obstante, se antoja aplicar el método de superposición a los estudios de interacción si se puede garantizar que no se pierde demasiada exactitud al hacerlo. El análisis modal hace que los cálculos requeridos sean equivalentes a los de un sistema de osciladores simples amortiguados y permite una interpretación física sencilla de la dinámica del sistema estructura-cimentación. Además, en muchas estructuras la respuesta dominante está dada por una o unas cuantas componentes modales; aun para sistemas complejos de este tipo, el análisis modal puede ser particularmente efectivo pues sólo se necesita considerar unos cuantos términos.

Ultimamente se han propuesto varios métodos aproximados de superposición para el problema de interacción (9, 11, 12, 14). En todos ellos las configuraciones modales, las frecuencias naturales y los factores de participación se han obtenido de las matrices de masa y rigidez del sistema suponiendo valores constantes para los coeficientes de rigidez de la cimentación. Los métodos difieren en la forma de calcular el amortiguamiento modal: Roesset, Whitman y Dobry (12), Novak (9) y Rainer (11) asignan valores pesados del amortiguamiento basados en el criterio de energía de Jacobsen (6) para evaluar el amortiguamiento modal en estructuras compuestas, mientras que Tsai (14) calcula el amortiguamiento modal igualando la función de transferencia de la amplitud de la solución exacta y la modal para un cierto punto de la estructura. Mientras que este último método asegura que los valores máximos de la respuesta en el estado estacionario coincidan para el análisis modal y exacto en un punto dado, tiene la desventaja de que requiere que se obtenga la solución exacta antes de evaluar el amortiguamiento modal. Además el

coeficiente de amortiguamiento resultante no distingue las fuentes de disipación de energía. En los estudios de Novak y Tsai se considera un amortiguamiento del suelo de tipo geométrico (de radiación), mientras que Roesset et al. consideran, además, comportamiento histerético lineal del material del suelo para considerar la fricción interna.

En este artículo se propone una expresión alternativa para calcular el amortiguamiento modal del sistema. Esta aproximación se obtiene como una extensión formal del método clásico de análisis modal que se ha demostrado (1) equivalente al criterio de energía propuesto primeramente por Jacobsen. El amortiguamiento modal en el sistema se expresa como una suma pesada de las fracciones de amortiguamiento crítico de la superestructura, más un término adicional que representa la energía disipada por el suelo. Esta expresión es formalmente diferente y más general que otras fórmulas aproximadas que se han propuesto.

Para estructuras de un nivel, se estudió el grado de exactitud proporcionado por el método propuesto comparando la expresión para la fracción de amortiguamiento crítico efectivo con la que se encuentra de una solución exacta. Se presenta un ejemplo para ilustrar la aplicabilidad del método a estructuras de varios niveles soportadas en suelos viscoelásticos. Los resultados obtenidos con este método se comparan con soluciones exactas en el dominio de la frecuencia, y se evalúan por separado las contribuciones del suelo y de la estructura al amortiguamiento modal del sistema.

ANÁLISIS DEL SISTEMA

Suponiendo un comportamiento lineal del suelo y la estructura, las ecuacio-

nes de movimiento de sistemas superestructura-cimentación sujetos al estado estacionario de una excitación armónica se pueden escribir como:

$$M_0 \ddot{\underline{u}} + C_0(\omega) \dot{\underline{u}} + K_0(\omega) \underline{u} = \underline{P} \quad (1)$$

Aquí, M_0 , C_0 , K_0 = matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, respectivamente; ω = frecuencia circular de la excitación; \underline{u} , \underline{P} = vectores de desplazamiento y de perturbación en el estado estacionario. La ec. 1 rige las oscilaciones que resultan de fuerzas aplicadas directamente a la estructura así como las producidas por el movimiento del terreno.

Las matrices C_0 y K_0 incluyen elementos que describen las propiedades de amortiguamiento y rigidez de la superestructura, que no dependen del tiempo, así como elementos que representan a estas mismas propiedades valuadas en la interfase entre la estructura y el suelo los cuales varían con la frecuencia de excitación.

La respuesta en el estado transitorio puede obtenerse a partir de la ec. 1 interpretándola como la transformada de Fourier de la ecuación que gobierna el movimiento. En este caso \underline{P} debe considerarse como la transformada de Fourier de la excitación transitoria $\underline{P}(t)$. De esta manera, la respuesta puede obtenerse tomando la transformada inversa de la ec. 1.

En este estudio se presenta un método alternativo para el análisis de la respuesta transitoria. Se supone que los elementos dependientes de la frecuencia en $K_0(\omega)$ no varían en forma significativa con ω dentro del intervalo de interés, y pueden aproximarse por un valor constante correspondiente a la frecuencia fundamental de resonancia del sistema superestructura-cimentación. La variación de

$C_o(\omega)$ con la frecuencia es más rápida, y en consecuencia debe considerarse explícitamente en el análisis.

Método aproximado de superposición modal

Sean \tilde{X}_j el j -ésimo modo ortogonal y $\tilde{\omega}_j$ la frecuencia circular natural correspondiente del sistema no amortiguado superestructura-cimentación. Estas cantidades se definen mediante el problema de valores característicos.

$$K_o(\tilde{\omega}_j) \tilde{X}_j = \tilde{\omega}_j^2 M_o \tilde{X}_j \quad (2)$$

Supóngase que la ec. 1 admite una solución de la forma

$$\underline{u}(t) = \sum_{j=1}^N \tilde{X}_j q_j(t) \quad (3a)$$

donde la suma se lleva sobre el número total de grados de libertad del sistema superestructura-cimentación, y $q_j(t)$ son las coordenadas generalizadas del problema. Sustituyendo esta solución en la ec. 1, premultiplicando el resultado por el vector transpuesto de \tilde{X}_k , y despreciando los términos que contienen el producto $\tilde{X}_k^T C_o \tilde{X}_j$ para $k \neq j$, se obtiene la ecuación

$$\ddot{q}_j(t) + 2 \tilde{\omega}_j \tilde{\eta}_j \dot{q}_j(t) + \tilde{\omega}_j^2 q_j(t) = \tilde{p}_j(t); \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (3b)$$

donde

$$\tilde{\omega}_j^2 = \frac{\tilde{X}_j^T K_o(\tilde{\omega}_j) \tilde{X}_j}{\tilde{X}_j^T M_o \tilde{X}_j} \quad (4a)$$

$$2 \tilde{\eta}_i \tilde{\omega}_i = \frac{\tilde{\underline{X}}_i^T C_o(\tilde{\omega}_i) \tilde{\underline{X}}_i}{\tilde{\underline{X}}_i^T M_o \tilde{\underline{X}}_i} \quad (4b)$$

$$\tilde{\underline{p}}_i(t) = \frac{\tilde{\underline{X}}_i^T \underline{P}(t)}{\tilde{\underline{X}}_i^T M_o \tilde{\underline{X}}_i} \quad (4c)$$

Nótese que K_o es una matriz constante para todos los valores de la frecuencia, mientras que C_o es dependiente de la frecuencia del modo en consideración. Es necesario recurrir a iteraciones en la ec. 2 para obtener la configuración del modo fundamental y su frecuencia natural puesto que $K_o(\tilde{\omega}_1)$ no es conocida en un principio. Una vez determinada $K_o(\tilde{\omega}_1)$ los demás modos y frecuencias naturales se pueden determinar considerándola una matriz constante. Para calcular $\tilde{\eta}_i$ no es necesario hacer iteraciones.

Las ecs. 3 y 4 describen un método de análisis modal para resolver las ecuaciones de movimiento. La solución está dada por la superposición lineal del modo normal $\tilde{\underline{X}}_i$ con $q_i(t)$ como coordenadas generalizadas. Para encontrar $q_i(t)$ basta resolver el problema de la vibración de un oscilador simple de comportamiento lineal con amortiguamiento viscoso. El oscilador, que tiene una frecuencia circular natural $\tilde{\omega}_i$ y una fracción del amortiguamiento crítico $\tilde{\eta}_i$, se sujeta a una fuerza efectiva $\tilde{\underline{p}}_i(t)$ transitoria o estacionaria de acuerdo a las características de la excitación original $\underline{P}(t)$.

El método descrito no proporciona una solución exacta de la ec. 1 puesto

que las dos hipótesis requeridas para su aplicación (K_0 independiente de la frecuencia y $C_0(\omega)$ ortogonal respecto a los modos normales) no son satisfechas en general. Sin embargo, las funciones de transferencia correspondientes a la respuesta en el estado estacionario de sistemas estructura-cimentación se asemejan, en general, a las obtenidas para sistemas lineales con propiedades que no dependen del tiempo y que tienen modos normales clásicos. En consecuencia, puede esperarse que el método de superposición modal proporcione aproximaciones aceptables desde el punto de vista ingenieril, especialmente si la estructura por sí misma admite la descomposición modal.

Amortiguamiento modal en términos de las propiedades del suelo y de la estructura.

En una estructura el amortiguamiento se mide generalmente por fracciones del amortiguamiento crítico asociadas a cada uno de los modos estructurales, mientras que la disipación de energía en el suelo se mide por los coeficientes de amortiguadores equivalentes (que dependen de la frecuencia) relacionados con la parte imaginaria de las funciones de impedancia entre la estructura y el suelo. Si se introducen las configuraciones modales de la superestructura en la expresión para $\tilde{\eta}_i$ es posible encontrar una expresión para el amortiguamiento del sistema en términos de las cantidades mencionadas.

En la Fig 1 se representa una estructura de n niveles, de comportamiento lineal y amortiguamiento viscoso, con un grado de libertad por piso, que descansa en la superficie de un semiespacio homogéneo, lineal, viscoelástico.

El sistema estructura-cimentación posee $n + 2$ grados de libertad signifi-

cativos; la traslación horizontal de la masa de cada nivel, la traslación horizontal de la masa de la base y la rotación del sistema en el plano del movimiento.

Suponiendo que el sistema, inicialmente en reposo, se sujeta a un movimiento sísmico o bien a una excitación armónica representada por ondas planas horizontales de cortante, de tal manera que la aceleración de la superficie libre del terreno sea el doble de la amplitud de la onda considerada, se ha demostrado (1) que el amortiguamiento modal del sistema en estudio se puede obtener a partir de la ec. 4b.

Si la configuración modal \tilde{X}_i se particiona en sus componentes estructurales (denotando a este vector por \underline{Y}_i), la traslación de la base, $(v_0)_i$, y la rotación del sistema, representada por $(h_1 \psi)_i$ (h_1 es la altura del primer nivel respecto a la base y ψ la rotación de la misma), entonces el vector \underline{Y}_i se puede expresar como una combinación lineal de las configuraciones modales de la superestructura cimentada en suelo rígido, \underline{X}_i esto es:

$$\underline{Y}_i = \sum_{j=1}^n \alpha_{ij} \underline{X}_j \quad (7)$$

donde

$$\alpha_{ij} = \frac{\underline{X}_i^T M \underline{Y}_j}{\underline{X}_i^T M \underline{X}_i} \quad (8)$$

siendo M la matriz diagonal de masas de la superestructura.

Sustituyendo la ecs. 7 y 8 en 4b, y haciendo uso de la ortogonalidad de los modos de la superestructura respecto a la matriz M , se obtiene

$$\tilde{\eta}_i = \sum_{k=1} \beta_{kj} \eta_k + \lambda_j ; \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (9)$$

En la ec. 9

$$\beta_{kj} = \frac{(\underline{X}_k^T M \underline{Y}_j)^2}{(\underline{X}_k^T M \underline{X}_k) (\underline{X}_j^T M_0 \underline{X}_j)} \frac{\omega_k}{\tilde{\omega}_j} \quad (10)$$

$$\lambda_j = \frac{1}{2 \tilde{\omega}_j} \frac{c_{vv}(\tilde{\omega}_j) (v_0)_j^2 + 2 c_{v\varphi}(\tilde{\omega}_j) (v_0)_j (h_1 \varphi)_j + c_{\varphi\varphi}(\tilde{\omega}_j) (h_1 \varphi)_j^2}{\underline{X}_j^T M_0 \underline{X}_j} \quad (11)$$

siendo ω_j , η_j la frecuencia circular natural y la fracción de amortiguamiento del j -ésimo modo de la superestructura cimentada en suelo rígido respectivamente, y c_{lm} ($l, m = v, \varphi$) funciones que aparecen en la matriz de amortiguamiento representando los coeficientes de amortiguamiento de los amortiguadores equivalentes que surgen debido a la fuerza y momento de interacción entre la cimentación y el suelo (1, 16).

Con la ec. 9 es posible obtener el amortiguamiento modal total en el j -ésimo modo de vibración del sistema mostrado en la Fig 1. Los coeficientes β_{kj} miden las contribuciones de las fracciones de amortiguamiento crítico de cada modo de la superestructura, y λ_j proporciona la fracción de amortiguamiento debida a la disipación de energía por el suelo.

La expresión para $\tilde{\eta}_j$ dada en la ec. 9 se obtuvo para la estructura mostrada en la Fig 1; sin embargo es igualmente aplicable a cualquier superestructura de comportamiento lineal invariante en el tiempo que posea modos normales clásicos.

Esta expresión incluye como casos especiales las reglas obtenidas (9, 12) para varios sistemas con base en el criterio de energía de Jacobsen (6).

APLICACIONES

Para probar la validez del método de análisis modal desarrollado se examinó (1) la respuesta de sistemas idealizados de estructura-cimentación ante una excitación senoidal en estado estacionario. A continuación se presenta un ejemplo numérico y fórmulas para algunos de los parámetros más importantes en la respuesta de estructuras de un nivel, las cuales se comparan con las obtenidas (7) de una solución exacta.

Estructuras de varios niveles sobre un semiespacio viscoelástico

En la Tabla 1 se presentan valores numéricos para las masas y alturas de los tres niveles de una estructura del tipo mostrado en la Fig 1. En la Tabla 2 se enlistan las frecuencias naturales correspondientes a cada modo (caso correspondiente a suelo rígido). Se supone un amortiguamiento modal $\eta_j = 2\%$ del crítico ($j = 1, 2, 3$) para la superestructura. La base se considera circular con radio de 1.75 m.

El suelo de la cimentación tiene una masa específica de 2000 kg/m^3 y módulo de Poisson $\nu = 0.45$. Se consideran cuatro diferentes rigideces del suelo en términos de la velocidad de las ondas de cortante: $V_s = 100, 150, 300$ y 600 m/seg . Se toman en cuenta la energía disipada en el suelo por radiación y las pérdidas debidas a la fricción interna. El amortiguamiento del material se toma como histerético lineal y se mide por el coeficiente D , definido como $1/4\pi$ veces la razón de

la energía disipada en un ciclo por un espécimen de suelo sujeto al estado estacionario de un movimiento armónico, a la máxima energía de deformación almacenada en el espécimen. D es independiente de la frecuencia de excitación.

Se calculó la respuesta de la estructura idealizada a una aceleración $\ddot{v}_g(t)$ de amplitud \bar{v}_g para distintas condiciones del suelo. En las Figs. 2 y 3 se presentan curvas de respuesta a la frecuencia para las amplitudes de v_1 , v_3 , $h_1\psi$ y v_0 en forma adimensional para distintos valores de V_s y del factor D . Para tener una idea de la exactitud del método aproximado propuesto se incluyen dos familias de curvas en estas figuras, una obtenida con el análisis modal y otra por un método exacto que consiste en la solución directa en forma numérica de las ecuaciones de movimiento para cada valor de la frecuencia circular de la excitación, ω . La correspondencia entre las dos familias de curvas es excelente inclusive cuando los efectos de la interacción suelo-estructura son pronunciados. Se han desarrollado otros ejemplos (1) que corroboran este resultado. Puede entonces esperarse que no se presentarán diferencias significativas en la respuesta a movimientos sísmicos para sistemas analizados por el método modal o por algún método más riguroso como, por ejemplo, el método operacional de Fourier (3, 7, 8, 17).

Como puede observarse en las Figs 2 y 3, la interacción suelo-estructura reduce las frecuencias de resonancia de la estructura cimentada en suelo rígido, y se producen cambios en los valores máximos de la respuesta que reflejan el cambio en la fracción de amortiguamiento de η_i a $\tilde{\eta}_i$. Estos cambios se muestran en detalle en las Tablas 2 a 4 y en la Fig 4. En la Tabla 2 se muestra cómo la frecuencia fundamental se reduce considerablemente en suelos blandos mientras que las frecuen-

cias restantes decrecen más lentamente. Las dos frecuencias de resonancia adicionales, que aparecen por la introducción de la rotación y traslación de la base, decrecen desde infinito en forma monótona para valores decrecientes de V_s .

Los modos de vibración y sus frecuencias circulares naturales no amortiguadas se muestran en la Fig 4 para varios valores de V_s . En cada caso se han esquematizado cinco configuraciones modales: tres asociadas a los modos estructurales y dos adicionales que surgen de la introducción de la rotación y movimiento lateral de la base. Para el caso rígido (Fig 4e) las tres primeras curvas muestran las configuraciones modales de la superestructura y las otras dos representan los casos límite de los modos adicionales. Los casos restantes muestran las contribuciones relativas de la deformación de la estructura y de la rotación y traslación de la base al desplazamiento total de las masas. Para cada valor de V_s las configuraciones se muestran en orden ascendente de frecuencias. De esta manera, los tres primeros modos representan en esencia versiones modificadas de los modos correspondientes al caso de suelo rígido. En suelos blandos ocurren cambios, y modos estructurales modificados se asocian a frecuencias más altas como se muestra en la Fig 4b donde para $V_s = 150$ m/seg la cuarta configuración modal corresponde al tercer modo estructural.

Las Tablas 3 y 4 presentan la fracción de amortiguamiento $\tilde{\eta}_i$ para D igual a 0 y 0.10, respectivamente. Estas tablas incluyen las contribuciones individuales de la estructura y de los elementos de amortiguamiento del suelo en el amortiguamiento total del sistema, determinado según la ec. 9. Para un modo dado del sistema y un valor de V_s y D , el renglón correspondiente en las tablas 3 y 4 proporciona el valor del amortiguamiento del suelo debido a la rotación y traslación de la

cimentación, y las contribuciones de los amortiguamientos modales de la estructura. Cada término representa una fracción del amortiguamiento crítico, y la suma de estos términos da el valor de $\tilde{\eta}_i$. Los resultados de estas tablas muestran que para los modos modificados los factores de participación β_{ki} de los términos fuera de la diagonal son significativamente menores que los factores β_{ji} lo cual sugiere que para aplicaciones prácticas, la suma en la ec. 9 puede reemplazarse por $\beta_{ji} \eta_i$. Sin embargo esta simplificación no es aplicable a los modos adicionales en los cuales β_{ki} ($k \neq j$) puede exceder β_{ji} .

En todos los casos, el factor de participación β_{ji} fue menor que la unidad para los ejemplos que se estudiaron. Los intentos hechos para probar la validez de esta observación para cualquier estructura no tuvieron éxito; sin embargo, de la ec. 10 puede mostrarse que β_{11} siempre satisface esta condición, y que $\omega_1/\bar{\omega}_1$ es una cota superior para β_{11} .

En las Tablas 3 y 4 se puede observar que la contribución del suelo al amortiguamiento total depende fuertemente del amortiguamiento del material, mostrando un incremento notable para valores crecientes de D . Este efecto es predominante en la rotación pero también está presente en la traslación de la base. Como se esperaba, el amortiguamiento del sistema asociado al amortiguamiento modal de la superestructura es prácticamente independiente de D . Cuando no se incluye el amortiguamiento del material, la interacción suelo-estructura produce una reducción significativa en la contribución del modo fundamental de la superestructura al amortiguamiento total $\tilde{\eta}_1$ de manera tal que $\tilde{\eta}_1$ es menor que η_1 . Cuando $D = 0.10$ el resultado es un incremento en el amortiguamiento total ($\tilde{\eta}_1 > \eta_1$)

El efecto de esta reducción o incremento se puede apreciar claramente en las Figs 2 y 3 donde se ve que la amplitud máxima de la respuesta crece para valores decrecientes de V_s cuando $D = 0$, mientras que sucede lo contrario para $D = 0.10$

Propiedades aproximadas para el modo fundamental

El modo fundamental domina en muchas de las variables importantes de la respuesta y proporciona la mayor contribución para casi todos los parámetros de interés de la respuesta. Adicionalmente, los efectos de la interacción suelo-estructura generalmente son más pronunciados en el modo fundamental. En consecuencia es útil conocer en forma aproximada estos efectos sin necesidad de evaluar simultáneamente las respuestas de todos los modos. En muchos casos, un análisis que considere la interacción sólo en el modo fundamental será adecuado para el diseño.

Jennings y Bielak (7) han presentado un método para calcular en forma aproximada la respuesta de estructuras soportadas en un semiespacio elástico a partir de la respuesta de un oscilador simple con base rígida. El oscilador equivalente se define por su frecuencia circular no amortiguada $\tilde{\omega}_1$ y la fracción de amortiguamiento crítico $\tilde{\eta}_1$. Es posible (1) obtener valores aproximados de estos parámetros en términos del modo fundamental de una estructura apoyada en suelo rígido con las siguientes expresiones

$$\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} = \left[1 + \frac{K_1}{k_{vv}(\tilde{\omega}_1)} + \frac{K_1}{k_{\psi\psi}(\tilde{\omega}_1)} \right]^{-1/2} \quad (12)$$

$$\tilde{\eta}_1 = \left(\frac{\tilde{\omega}_1}{\omega_1} \right)^3 \eta_1 + \frac{1}{2} \tilde{\omega}_1^3 M_1 \left[\frac{c_{vv}(\tilde{\omega}_1)}{k_{vv}^2(\tilde{\omega}_1)} + \frac{c_{\varphi\varphi}(\tilde{\omega}_1)}{k_{\varphi\varphi}^2(\tilde{\omega}_1)} \right] \quad (13)$$

siendo

$$K_1 = M_1 \omega_1^2 \quad (14a)$$

$$M_1 = \frac{(\sum_i m_i X_{i1})^2}{\sum_i m_i X_{i1}^2} \quad (14b)$$

$$H_1 = \frac{\sum_i m_i h_i X_{i1}}{\sum_i m_i X_{i1}} \quad (14c)$$

y k_{lm} ($l, m = v, \varphi$) funciones (1, 16) que aparecen en la matriz de rigideces del sistema y que representan los coeficientes de rigidez de los resortes equivalentes surgidos de la fuerza y momento de interacción entre la base y el suelo en la cimentación.

Una vez determinados $\tilde{\omega}_1$ y $\tilde{\eta}_1$, la respuesta aproximada del modo fundamental se puede calcular con

$$\langle \underline{v}^T(t), v_o(t), H_1 \psi(t) \rangle = \frac{\sum_i m_i X_{i1}}{\sum_i m_i X_{i1}^2} \left\langle \underline{X}_1^T, \frac{K_1}{k_{vv}(\tilde{\omega}_1)} X_{11}, \frac{K_1}{k_{\varphi\varphi}(\tilde{\omega}_1)} X_{11} \right\rangle w_1(t) \quad (15)$$

donde $w_1(t)$ es el desplazamiento relativo del oscilador simple amortiguado equivalente.

Para verificar la aplicabilidad de las fórmulas aproximadas para modelos estructura-cimentación en suelos viscoelásticos con amortiguamiento histerético, se

calcularon las frecuencias fundamentales y las fracciones de amortiguamiento correspondiente para algunos ejemplos incluyendo la estructura de tres niveles descrita anteriormente. En la Fig 5 se muestran los valores de $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ obtenidos de la solución exacta y de $\tilde{\eta}_1$ calculado con la ec. 9, junto con los valores aproximados de las ecs. 12 y 13. Los valores exactos y aproximados para $\tilde{\omega}_1/\omega_1$ coinciden, y la correspondencia en $\tilde{\eta}_1$ es excelente para los ejemplos considerados aun cuando las ecs. 12 y 13 se derivaron para estructuras con cimentaciones sin masa. La masa de la base para este ejemplo es del mismo orden de la masa total de la superestructura.

CONCLUSIONES

Los resultados del análisis exacto y del método modal propuesto en este trabajo concuerdan satisfactoriamente para los ejemplos desarrollados en este estudio, uno de los cuales se presenta en el texto. Estos resultados muestran que la disipación de energía debida al amortiguamiento histerético del suelo influye notablemente en la respuesta del sistema, especialmente en el modo fundamental.

El método de análisis modal propuesto parece suficientemente adecuado para determinar la respuesta de sistemas estructura-cimentación de comportamiento lineal. El método será más útil cuando la respuesta sea dominada por sólo unas cuantas componentes modales.

En el desarrollo de la teoría se supuso que la matriz de rigidez $K_0(\omega)$ podía ser aproximada por el valor constante $K_0(\omega_1)$. Esto es razonable siempre y cuando las componentes de rigidez del suelo no varíen demasiado rápidamente con la frecuencia de excitación, o bien cuando el modo fundamental domine la respuesta

del sistema.

El amortiguamiento modal del sistema, $\tilde{\eta}_i$, puede determinarse haciendo uso de las configuraciones modales de la superestructura en suelo rígido, quedando expresado como una suma pesada de las fracciones de amortiguamiento crítico de la superestructura, y un término adicional que represente la energía disipada por el suelo.

Cuando el efecto de la interacción es dominado por el modo fundamental, se puede calcular la respuesta en forma aproximada considerando un oscilador simple equivalente, cuyos parámetros están dados en el texto.

En la referencia (1) puede encontrarse un desarrollo más extenso de este trabajo.

REFERENCIAS

1. Bielak, J. "Modal analysis for building-soil interaction", Publicación E 17, Instituto de Ingeniería, UNAM, México (Julio 1975)
2. Castellani, A. "Foundation compliance effects on earthquake response spectra", Journal of the Soil Mechanics and Foundation Division, ASCE, 96 (1970), 1335-55
3. Chopra, A. K. y Gutiérrez, J.A. "Earthquake analysis of multistory buildings including foundation interaction", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3 (1974), 65-77
4. Chu, S.L. Agrawal, P.K. y Singh, S. "Finite element treatment of soil-structure interaction problem for nuclear power plant under seismic excitation", Procs., II International Conference on Structural Mechanics in Reactor Technology, Berlin (Sep 1973)
5. Isenberg, J. y Adham, S.A. "Interaction of soil and power plants in earthquakes", Journal of the Power Division, ASCE, 98 (1972) 273-91

6. Jacobsen, L.S. "Damping in composite structures", Procs., II World Conference on Earthquake Engineering, 2, Tokio (1960), 1029-44
7. Jennings, P.C. y Bielak, J. "Dynamics of building-soil interaction", Bulletin Seismological Society of America, 63 (1973), 9-48
8. Liu, S.C. y Fagel, L.W. "Earthquake interaction by Fast Fourier Transform", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, 97, (1971), 1223-37
9. Novak, M. "Effect of soil on structural response to wind and earthquake", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3, (1974), 79-96
10. Parmelee, R.A. Perelman, D.S. y Lee, S.L. "Seismic response of multiplstorey structure on flexible foundations", Bulletin Seismological Society of America, 59, (1969), 1061-70
11. Rainer, S.H. "Damping in dynamic structure-foundation interaction", Canadian Geotechnical Journal, 12 (1975), 13-22
12. Roesset, J. M. Whitman R.V. y Dobry, R. "Modal analysis for structures with foundation interaction", Journal Structural Division, ASCE, 99, (1973), 399-416
13. Seed, H.B. Lysmer, J. y Hwang, R. "Soil-structure interaction analysis for seismic response", Journal Geotechnical Engineering Division, ASCE, 101, (1975), 439-57
14. Tsai, N.C. "Modal damping for soil-structure interaction", Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, 100, (1974), 323-41
15. Vaish, A.K. y Chopra, A.K. "Earthquake finite element analysis of structure-foundation systems", Journal Engineering Mechanics Division, ASCE, 100, (1974), 1101-16
16. Veletsos, A.S. y Verbic, B. "Vibration of viscoelastic foundations", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 2, (1973), 97-102
17. Veletsos, A.S. y Meek, J.W. "Dynamic behavior of building-foundation systems", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, 3, (1974), 121-38

TABLA 1. Masas y alturas de la estructura

Nivel (1)	$m_i, 10^3 \text{ kg}$ (2)	$h_i, \text{ m}$ (3)
3	15	10.5
2	15	7.0
1	15	3.5
Base	30	—

TABLA 2. Frecuencias de resonancia, en hertz, del sistema superestructura-cimentación

Velocidad de las ondas de cortante, $V_s, \text{ m/seg}$ (1)	MODO				
	1 (2)	2 (3)	3 (4)	4 (5)	5 (6)
Suelo rígido	1.771	4.787	6.946	∞	∞
600	1.634	4.760	6.935	23.819	31.443
300	1.357	4.682	6.898	12.142	18.973
150	0.904	4.249	6.302	7.289	14.298
100	0.651	3.356	5.483	7.056	13.260

TABLA 3. Contribuciones modales al amortiguamiento efectivo

$$D = 0 \quad \eta_i = 2 \times 10^{-2} \quad (i = 1, 2, 3)$$

Vs m/seg (1)	Modo número i (sistema) (2)	Contribución de la estructura			Contribución del suelo		Amortigua- miento total (8)
		Modo número k (superestructura)			Traslación	Rotación	
		1 (3)	2 (4)	3 (5)	(6)	(7)	
600	1	1.57×10^{-2}	6.70×10^{-8}	4.11×10^{-9}	5.79×10^{-5}	4.41×10^{-7}	1.58×10^{-2}
	2	3.53×10^{-5}	1.97×10^{-2}	2.24×10^{-8}	1.57×10^{-4}	3.80×10^{-7}	1.99×10^{-2}
	3	2.13×10^{-5}	2.39×10^{-7}	1.99×10^{-2}	9.72×10^{-5}	1.72×10^{-7}	2.00×10^{-2}
	4	1.01×10^{-3}	6.38×10^{-4}	1.70×10^{-4}	1.29×10^{-1}	3.28×10^{-5}	1.31×10^{-1}
	5	5.12×10^{-2}	6.87×10^{-4}	9.84×10^{-5}	2.53×10^{-4}	1.54×10^{-2}	6.77×10^{-2}
300	1	8.97×10^{-3}	2.85×10^{-7}	1.75×10^{-8}	2.67×10^{-4}	5.63×10^{-6}	9.24×10^{-3}
	2	2.47×10^{-4}	1.86×10^{-2}	1.01×10^{-6}	1.72×10^{-3}	7.01×10^{-6}	2.06×10^{-2}
	3	2.08×10^{-4}	1.77×10^{-5}	1.95×10^{-2}	1.18×10^{-3}	1.92×10^{-6}	2.09×10^{-2}
	4	6.90×10^{-4}	1.80×10^{-3}	5.53×10^{-4}	1.24×10^{-1}	1.30×10^{-4}	1.27×10^{-1}
	5	8.63×10^{-2}	1.13×10^{-3}	2.18×10^{-4}	8.26×10^{-4}	1.70×10^{-2}	1.06×10^{-1}
150	1	2.63×10^{-4}	2.44×10^{-7}	1.57×10^{-8}	6.33×10^{-4}	2.38×10^{-5}	3.28×10^{-3}
	2	3.63×10^{-4}	1.14×10^{-2}	3.31×10^{-5}	2.98×10^{-2}	8.85×10^{-5}	4.17×10^{-2}
	3	1.56×10^{-3}	6.37×10^{-3}	5.50×10^{-3}	5.96×10^{-2}	3.14×10^{-5}	7.30×10^{-2}
	4	5.27×10^{-6}	2.66×10^{-3}	1.44×10^{-2}	3.48×10^{-2}	1.60×10^{-4}	5.20×10^{-2}
	5	1.15×10^{-1}	1.55×10^{-3}	3.91×10^{-4}	9.42×10^{-4}	1.94×10^{-2}	2.37×10^{-1}
100	1	9.75×10^{-4}	1.20×10^{-7}	7.84×10^{-9}	7.97×10^{-4}	3.50×10^{-5}	1.81×10^{-3}
	2	6.80×10^{-5}	2.90×10^{-3}	3.98×10^{-5}	8.29×10^{-2}	8.29×10^{-4}	8.61×10^{-2}
	3	2.01×10^{-3}	1.68×10^{-2}	6.29×10^{-4}	3.48×10^{-2}	1.54×10^{-5}	5.43×10^{-2}
	4	3.97×10^{-4}	8.13×10^{-4}	1.92×10^{-2}	4.75×10^{-3}	1.28×10^{-4}	2.53×10^{-2}
	5	1.24×10^{-1}	1.70×10^{-3}	4.71×10^{-4}	7.59×10^{-4}	9.93×10^{-2}	1.46×10^{-1}

TABLA 4. Contribuciones modales al amortiguamiento efectivo

$$D = 0.10 \quad \eta_j = 2 \times 10^{-2} \quad (j = 1, 2, 3)$$

Vs m/seg (1)	Modo número i (sistema) (2)	Contribución de la estructura			Contribución del suelo		Amortigua- miento total (8)
		Modo número k (superestructura)			Traslación	Rotación	
		1 (3)	2 (4)	3 (5)	(6)	(7)	
600	1	1.57×10^{-2}	6.99×10^{-8}	4.11×10^{-9}	7.05×10^{-4}	1.43×10^{-2}	3.07×10^{-2}
	2	3.53×10^{-5}	1.97×10^{-2}	2.26×10^{-8}	7.61×10^{-4}	5.00×10^{-4}	2.10×10^{-2}
	3	2.13×10^{-5}	2.41×10^{-7}	1.99×10^{-2}	3.54×10^{-4}	7.35×10^{-5}	2.03×10^{-2}
	4	1.01×10^{-3}	6.39×10^{-4}	1.70×10^{-4}	2.27×10^{-1}	4.13×10^{-4}	2.30×10^{-1}
	5	5.12×10^{-2}	6.87×10^{-4}	9.84×10^{-5}	3.97×10^{-4}	9.92×10^{-2}	1.52×10^{-1}
300	1	8.96×10^{-3}	2.85×10^{-7}	1.75×10^{-8}	2.07×10^{-3}	3.98×10^{-2}	5.08×10^{-2}
	2	2.46×10^{-4}	1.86×10^{-2}	1.02×10^{-6}	5.09×10^{-3}	1.24×10^{-3}	2.51×10^{-2}
	3	2.09×10^{-4}	1.79×10^{-5}	1.95×10^{-2}	2.75×10^{-3}	1.09×10^{-4}	2.26×10^{-2}
	4	6.94×10^{-4}	1.80×10^{-3}	5.56×10^{-4}	2.17×10^{-1}	1.57×10^{-3}	2.22×10^{-1}
	5	8.63×10^{-2}	1.13×10^{-3}	2.18×10^{-4}	1.22×10^{-3}	7.32×10^{-2}	1.62×10^{-1}
150	1	2.63×10^{-4}	2.44×10^{-7}	1.57×10^{-8}	3.85×10^{-3}	7.12×10^{-2}	7.77×10^{-2}
	2	3.59×10^{-4}	1.14×10^{-2}	3.34×10^{-5}	6.22×10^{-2}	2.80×10^{-3}	7.68×10^{-2}
	3	1.56×10^{-3}	6.44×10^{-3}	5.42×10^{-3}	1.03×10^{-1}	3.47×10^{-4}	1.17×10^{-1}
	4	5.77×10^{-6}	2.64×10^{-3}	1.45×10^{-2}	5.59×10^{-2}	1.22×10^{-3}	7.42×10^{-2}
	5	1.15×10^{-1}	1.55×10^{-3}	3.91×10^{-4}	1.24×10^{-3}	4.25×10^{-2}	1.61×10^{-1}
100	1	9.75×10^{-4}	1.20×10^{-7}	7.86×10^{-9}	4.55×10^{-3}	8.32×10^{-2}	8.87×10^{-2}
	2	6.63×10^{-5}	2.88×10^{-3}	3.97×10^{-5}	1.59×10^{-1}	4.08×10^{-3}	1.66×10^{-1}
	3	2.01×10^{-3}	1.69×10^{-2}	6.24×10^{-4}	5.38×10^{-2}	8.82×10^{-5}	7.34×10^{-2}
	4	3.97×10^{-4}	8.10×10^{-4}	1.92×10^{-2}	6.76×10^{-3}	4.47×10^{-4}	2.76×10^{-2}
	5	1.24×10^{-1}	1.70×10^{-3}	4.71×10^{-4}	9.31×10^{-4}	3.03×10^{-2}	1.57×10^{-1}

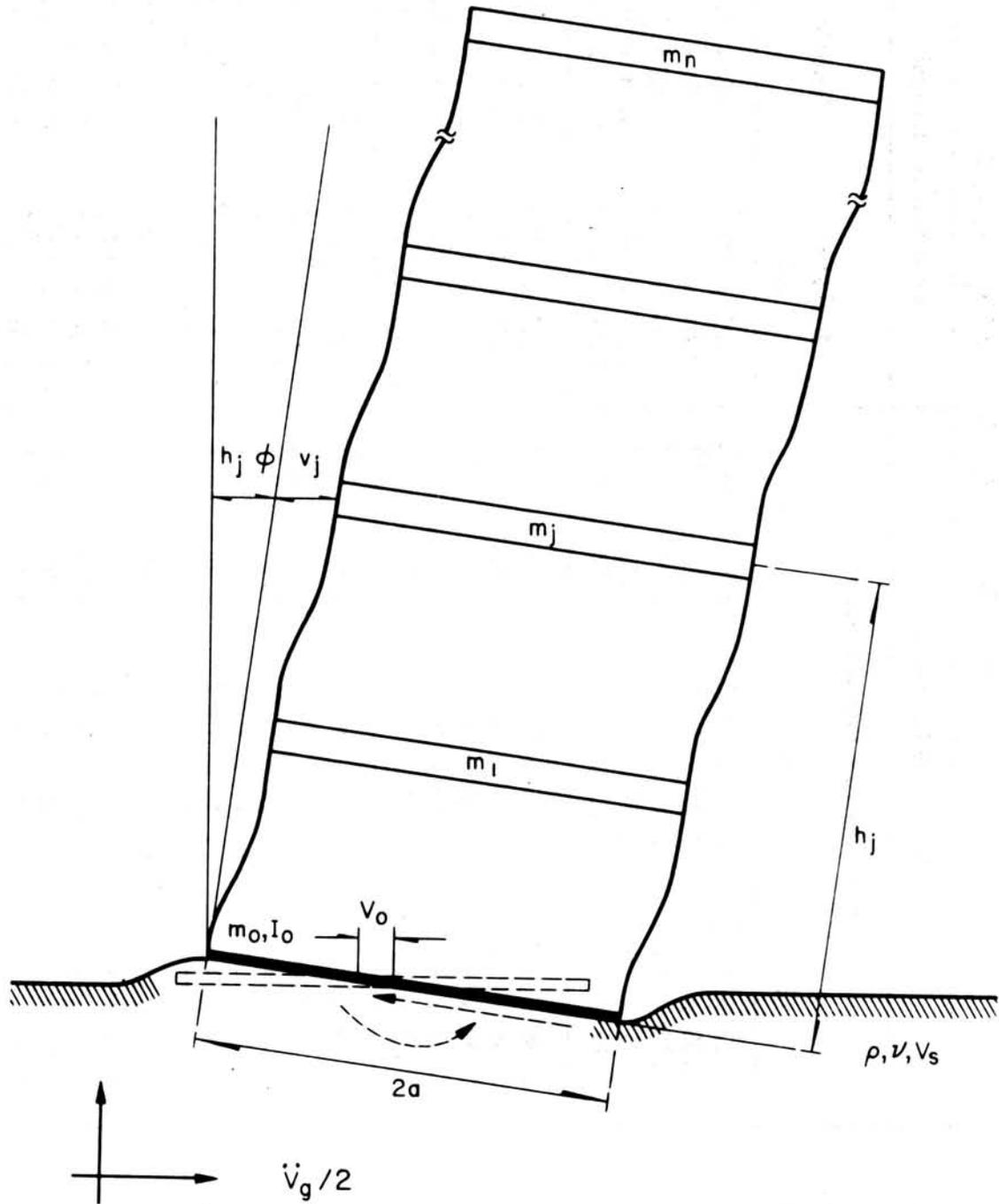


Fig 1. Modelo del sistema estructura-subsuelo

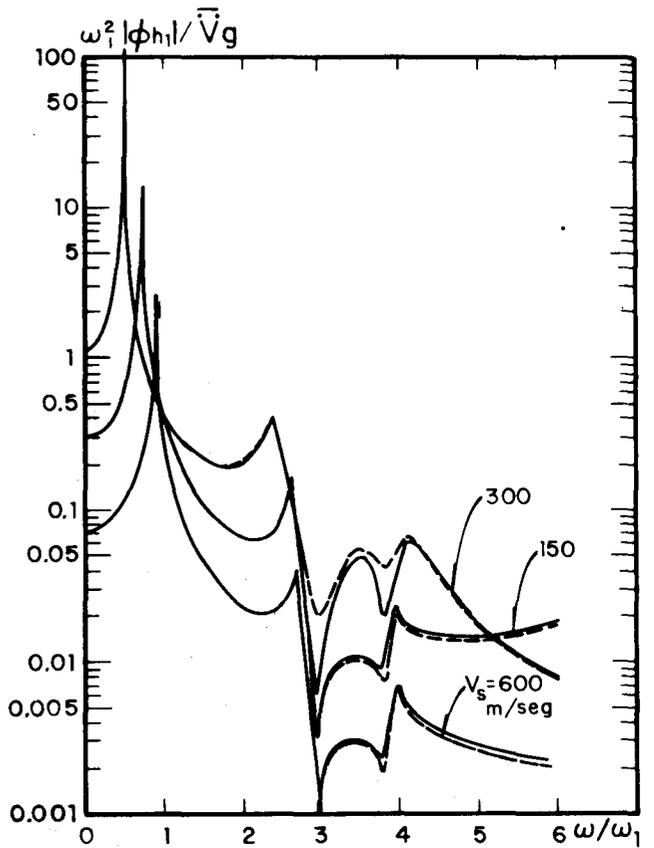
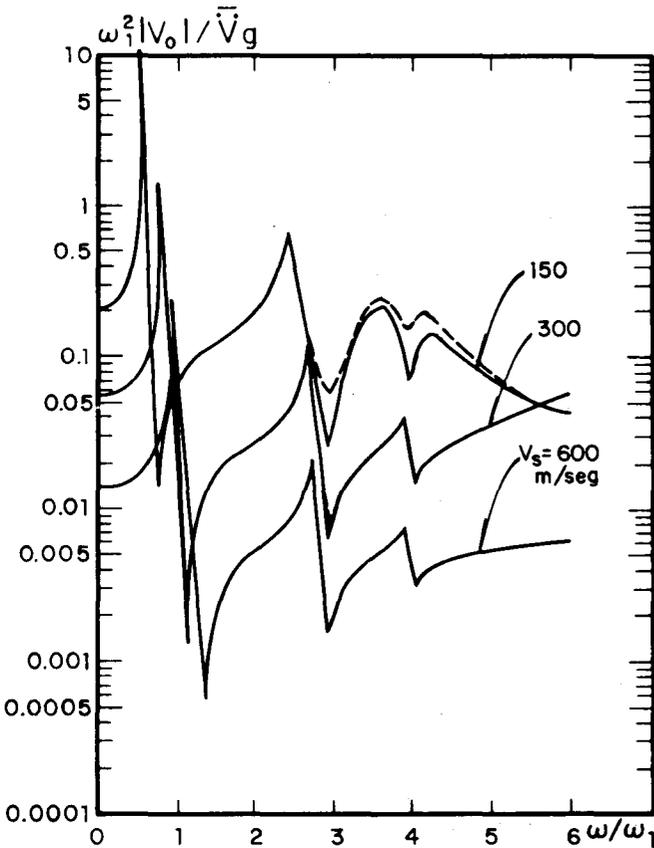
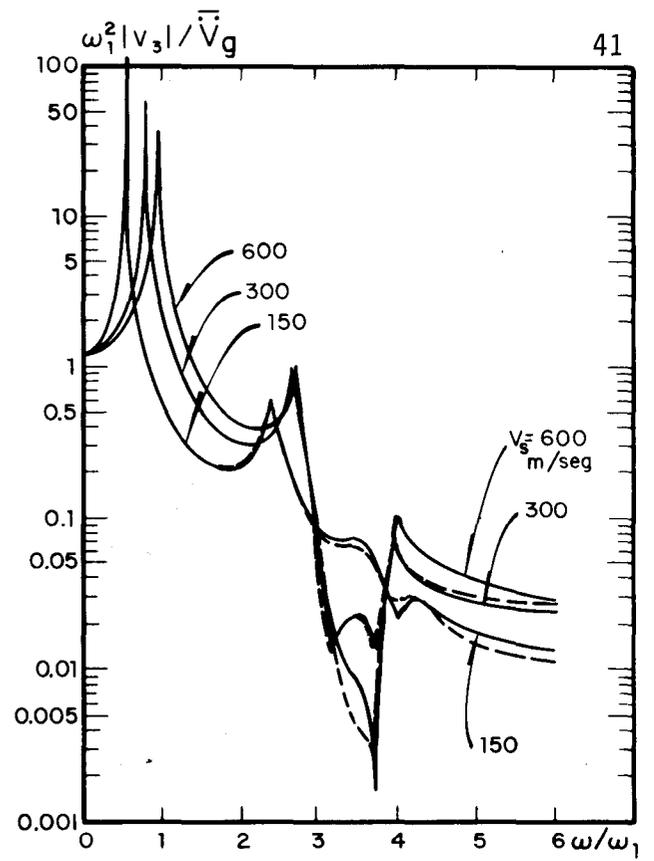
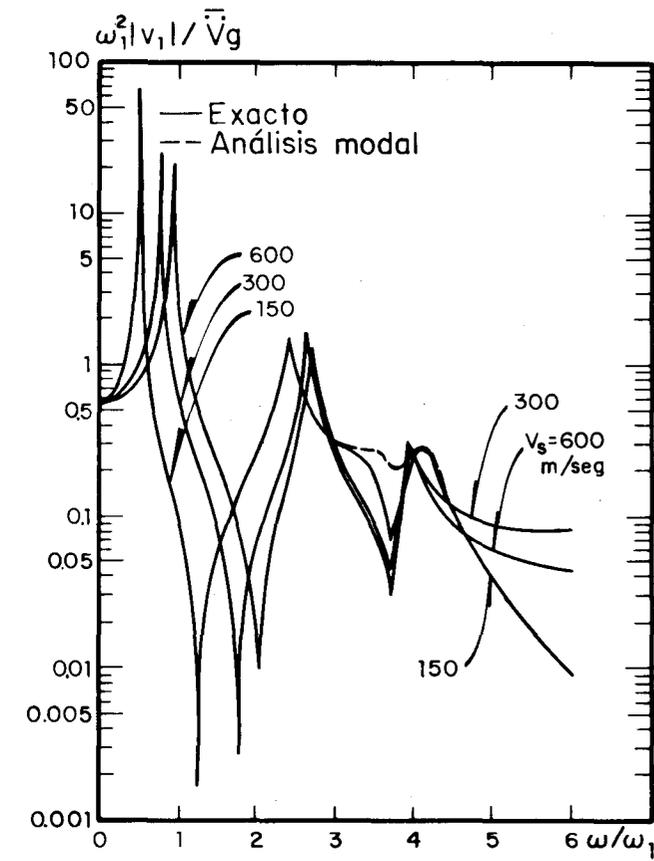


Fig 2. Curvas de amplificación de la respuesta vs frecuencia de un sistema estructura-subsuelo de 3 niveles. ($D = 0$)

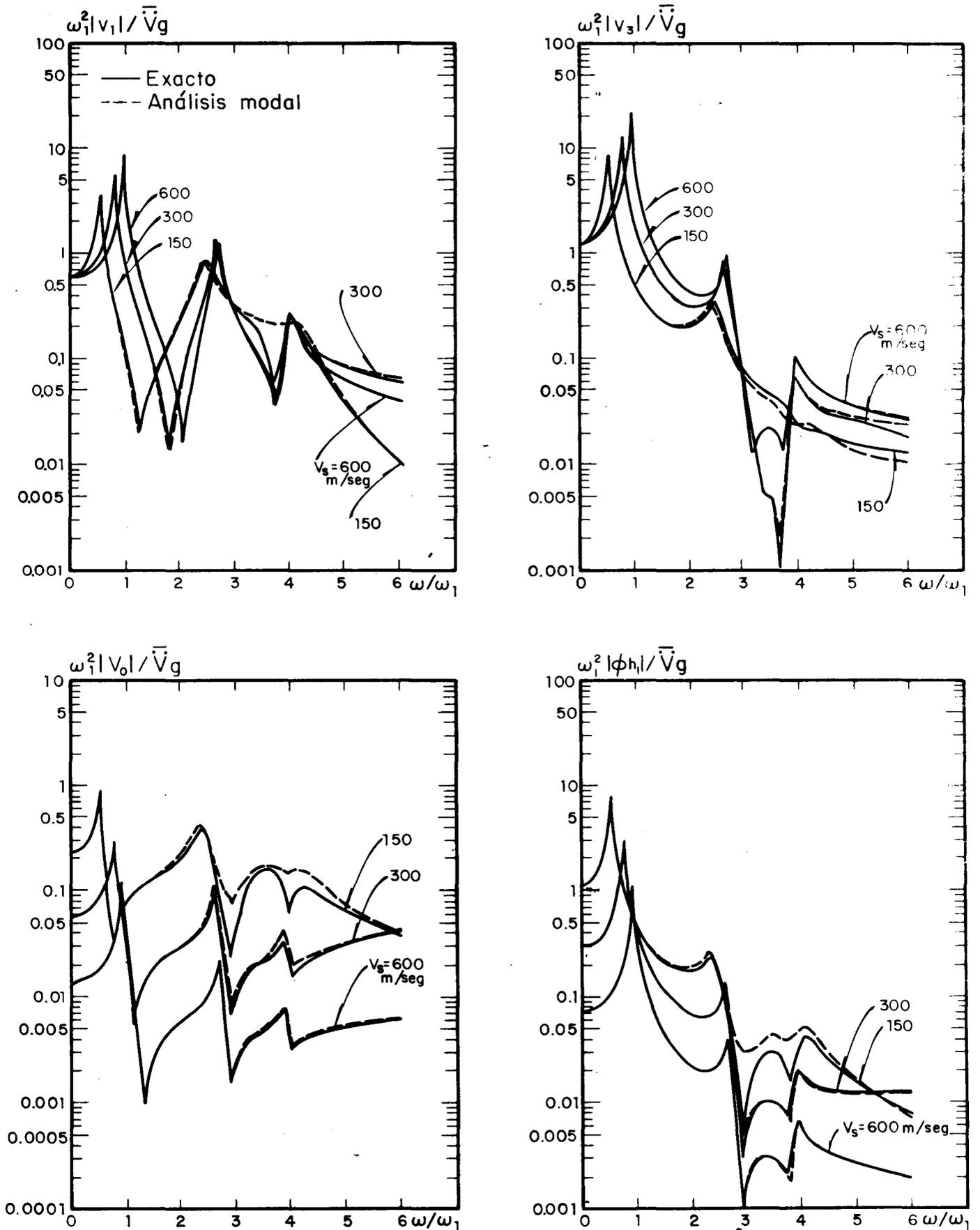
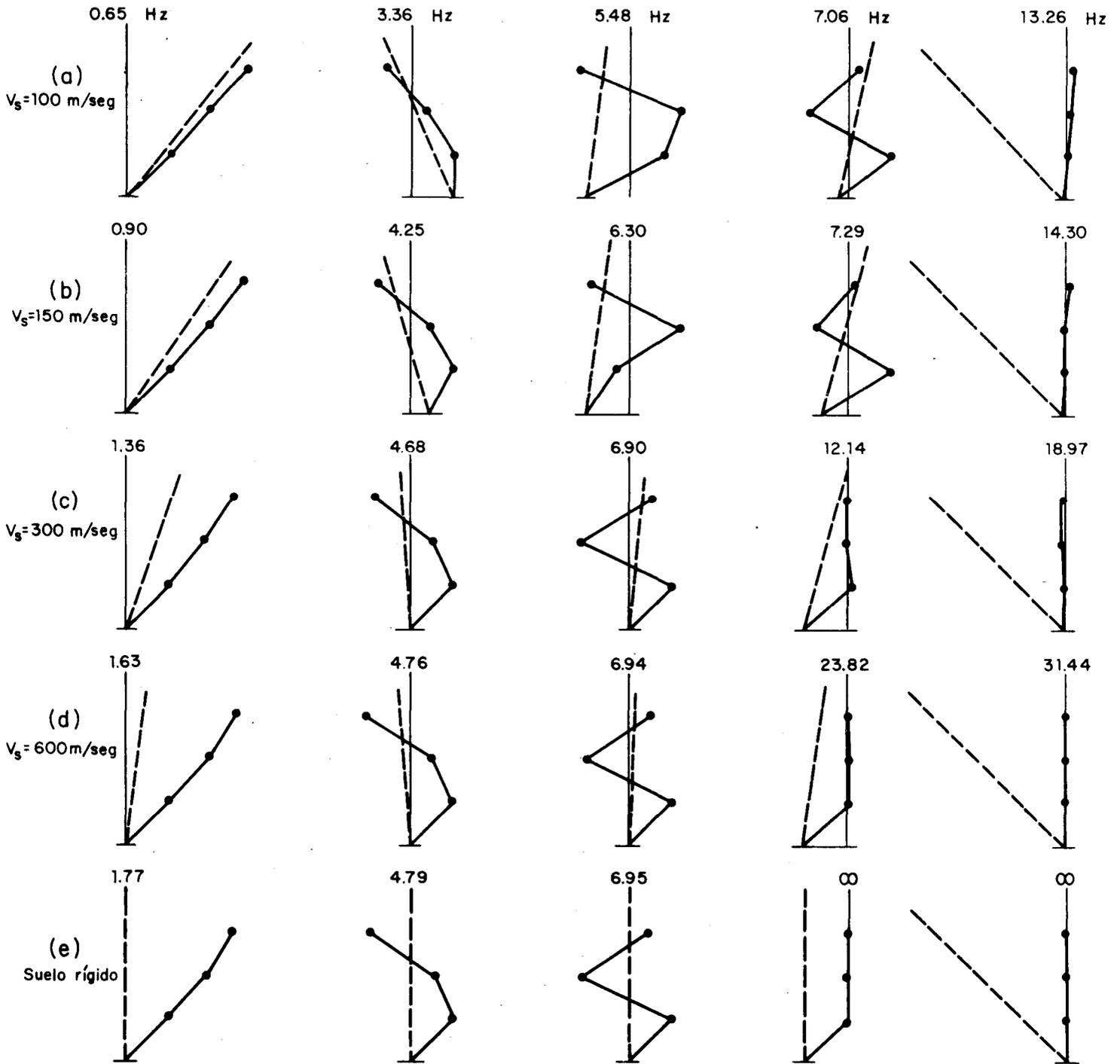


Fig 3. Curvas de amplificación de la respuesta vs frecuencia de un sistema estructura-subsuelo de 3 niveles ($D = 0.10$)



Nota: la línea punteada representa la rotación de la base

Fig 4. Configuraciones modales de una estructura de 3 niveles en suelos flexibles y en suelo rígido

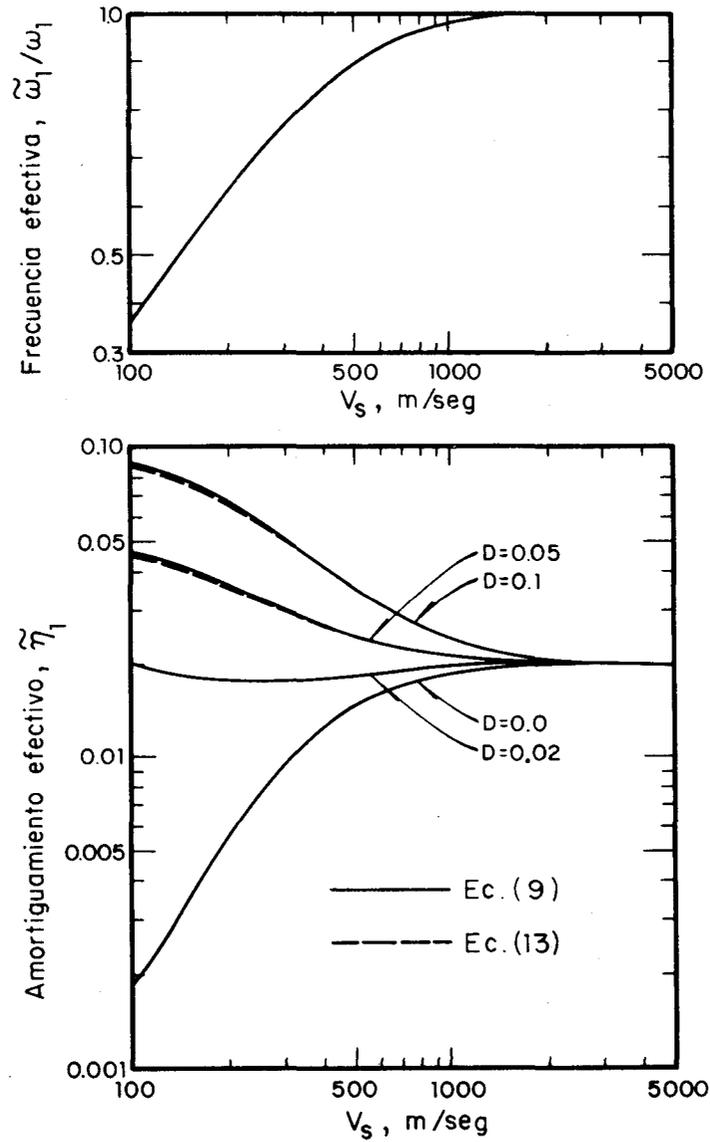


Fig 5. Frecuencia fundamental y fracción del amortiguamiento crítico para un sistema estructura-subsuelo de 3 niveles