

## AMPLIFICACION DE ONDAS DE RAYLEIGH

S. E. Ruiz  
L. Esteva

### RESUMEN

Se analiza la forma en que la presencia de un manto superficial de material compresible afecta las características del movimiento causado por ondas sísmicas de Rayleigh. Los valores de las funciones de amplificación obtenidos se comparan con valores que resultan de emplear el modelo usual unidimensional de ondas de cortante que viajan verticalmente. Se utiliza un modelo numérico bidimensional, y se plantea una formulación mixta de las condiciones de frontera que limitan dicho modelo a un espacio finito.

### ABSTRACT

An analysis is presented of the influence of a soft surface layer on the motion produced by seismic Rayleigh waves. Discrete amplification values are compared with those arising from the conventional unidimensional model of vertically-traveling shear waves. A two-dimensional finite-element model is adopted, and a mixed formulation of boundary conditions is used in order to work within a finite space.

---

\* Instituto de Ingeniería, UNAM.

## AMPLIFICACION DE ONDAS DE RAYLEIGH

S. E. Ruiz

L. Esteva

### 1. INTRODUCCION

En la estimación de riesgo sísmico, entre otros problemas de ingeniería, es necesario predecir las características de los temblores en sitios dados, a partir de magnitud y distancia entre foco y sitio. Tal predicción se hace con frecuencia en dos etapas: la primera se refiere a terreno firme y la segunda toma en cuenta la influencia de las condiciones locales.

Estudios recientes (ref 1-4) indican que una parte importante de la energía sísmica originada en un foco poco profundo se propaga en forma de ondas superficiales, tanto a largas distancias como en el campo cercano. La forma en que las condiciones locales, tales como la presencia de mantos de material compresible, afecta las características de los

movimientos sísmicos depende del tipo y dirección de los trenes de ondas que llegan a cada sitio (ref 5, 12); sin embargo, la mayor parte de los estudios relativos a la influencia citada suele tomar en cuenta únicamente las ondas transversales que inciden verticalmente en la superficie de contacto entre las formaciones blandas y el terreno firme.

Los estudios sistemáticos sobre la forma en que las condiciones locales afectan las amplitudes de ondas superficiales datan de unos cuantos años (ref 6-10), y en la mayor parte de los casos se refieren a ondas de Love. En este trabajo se estudia la influencia de mantos de material compresible en los movimientos del terreno causados por ondas de Rayleigh. Para ello, se obtienen puntos discretos de las funciones de amplificación en el dominio de la frecuencia, obtenidas como cocientes de las amplitudes máximas del movimiento en la superficie del material compresible y las que se presentarían en terreno firme, de no ser modifi cadas por la presencia de dicho material. Las funciones de amplifica ción que se estudian corresponden a ondas armónicas estacionarias de diversas frecuencias. Estas funciones se comparan con las que resul tan de emplear el modelo usual (unidimensional) que supone ondas trans versales que inciden verticalmente.

En vista de que las funciones de amplificación son sensibles al tipo de onda, el empleo de las primeras para estudiar la influencia de condiciones locales ante excitaciones sísmicas requiere el conocimiento de la fracción de la energía que llega a la vecindad del sitio de interés en

diversos tipos de ondas. Este problema ha recibido poca atención por parte de ingenieros y deberá ser objeto de estudios futuros.

## 2. ANALISIS DE RESPUESTA

### 2.1 Condiciones locales

La fig 1 muestra la configuración de los casos analizados. En cada uno de ellos se supone que un tren de ondas de Rayleigh se propaga bajo condiciones de deformación plana por el medio homogéneo, a la izquierda de la figura, hasta incidir sobre la frontera DEF que separa el medio homogéneo citado (en adelante llamado terreno firme) del manto de material compresible que se encuentra en la parte superior derecha. Se obtiene la relación entre las amplitudes máximas del movimiento del terreno en diversos puntos de la superficie DB y la amplitud de las ondas de llegada en A, para diversas frecuencias de dichas ondas y diversas combinaciones de propiedades mecánicas de los dos medios. El análisis se limita a la condición de sistemas lineales sin viscosidad. Los resultados se comparan con las funciones de amplificación correspondientes a ondas transversales y longitudinales que viajan en dirección vertical.

### 2.2 Modelo numérico

Se adoptó el criterio de análisis de respuesta compleja en el dominio de la frecuencia. Para ello, se definió un modelo de elementos finitos, con las condiciones de frontera que se describen más adelante, y

se establecieron las ecuaciones de equilibrio dinámico para las condiciones de excitación correspondientes a la llegada, de izquierda a derecha, de ondas de Rayleigh de distintas frecuencias. La relación entre máxima dimensión lineal de los elementos finitos y la mínima longitud de onda excitadora nunca excedió de 4/15. El límite recomendado para los casos en que el análisis se lleva a cabo por criterios de propagación de ondas es 1/12 (ref 11).

### 2.3 Condiciones de frontera

Si las ondas que entran y salen por una frontera dada son de igual tipo y dirección de propagación, es posible representar las condiciones de frontera mediante sistemas de amortiguadores viscosos. En otros casos tal representación puede lograrse sólo de manera aproximada. En este trabajo se plantea una formulación mixta, en que se estipulan de manera exacta los esfuerzos de las ondas de entrada y se ponen en forma aproximada las condiciones de frontera para las ondas de salida, de tipo y dirección desconocidos.

Considérese una frontera plana, un sistema conocido de ondas penetrando a través de ella a la región R que interesa estudiar, y un sistema desconocido abandonándola (fig 3). Sean  $\sigma_1$  y  $\tau_1$  los esfuerzos normal y tangencial sobre la frontera que resultan del sistema de ondas inci-dentes, y sean  $\sigma_2$  y  $\tau_2$  los que corresponden a las ondas que salen. Defínanse los ejes  $\xi$  y  $\eta$  como en la fig 3, y sean  $u$  y  $v$  los despla-

zamientos paralelos a cada uno de ellos. Los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\tau_1$  se calculan en términos de las expresiones analíticas de las ondas incidentes;  $\sigma_2$  y  $\tau_2$  pueden expresarse en forma sencilla en términos de las velocidades de los puntos de la frontera, si se introducen hipótesis simplificadoras.

Supóngase que  $\sigma_2$  está provocado por ondas planas longitudinales que viajan paralelamente al eje  $\eta$ . Sean  $c_p$  la velocidad de propagación de dichas ondas y  $v_2$  el correspondiente desplazamiento paralelo al eje  $\eta$ . Se tiene

$$\sigma_2 = (\lambda + 2G) \frac{\partial v_2}{\partial \eta} \quad (1)$$

Por otra parte,

$$\frac{\partial v_2}{\partial \eta} = \frac{1}{c_p} \frac{\partial v_2}{\partial t} = \frac{\dot{v}_2}{c_p}$$

teniendo en cuenta que  $c_p^2 = (\lambda + 2G)/\rho$ , en donde  $\rho$  es densidad del material, se obtiene

$$\sigma_2 = -\rho c_p \dot{v}_2 \quad (2)$$

El desplazamiento  $v$  es la suma de las contribuciones  $v_1$  y  $v_2$  de las ondas que entran y salen de R. Por lo tanto,  $\dot{v}_2 = \dot{v} - \dot{v}_1$ , y el esfuerzo resultante en un punto de la frontera AB se determina aproximadamente como sigue:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_1 - \rho c_p (\dot{v} - \dot{v}_1) \\ &= \sigma_1 + \rho c_p \dot{v}_1 - \rho c_p \dot{v} \end{aligned} \quad (3)$$

Es decir, la condición de frontera equivale a considerar un conjunto de amortiguadores viscosos, actuando paralelamente al eje  $\eta$ . La constante de disipación de dichos amortiguadores vale  $\rho \cdot c_p$  por unidad de área en el plano de la frontera. Además, sobre la frontera debe aplicarse un esfuerzo igual a  $\sigma_1 + \rho c_p \dot{v}_1$ .

Un razonamiento análogo conduce a la siguiente condición de frontera referida a esfuerzos tangenciales, en donde  $c_s$  es la velocidad de propagación de las ondas transversales.

$$\tau = \tau_1 + \rho c_s \dot{u}_1 - \rho c_s \dot{u} \quad (4)$$

En ciertos casos es posible suponer que la mayor parte de la energía que sale por una frontera está asociada con ondas de tipo y dirección de propagación conocidos. En tal caso, las ecs 3 y 4 se modifican como sigue:

$$\sigma = \sigma_1 + a \rho c_p \dot{v}_1 - a \rho c_p \dot{v} \quad (5)$$

$$\tau = \tau_1 + b \rho c_s \dot{u}_1 - b \rho c_s \dot{u} \quad (6)$$

Aquí,  $a$  y  $b$  son parámetros que pueden depender o no de la frecuencia, de acuerdo con el tipo de ondas. Para el caso de ondas de Rayleigh en un medio homogéneo (parte izquierda de la fig 1), dichos parámetros fueron determinados por Lysmer y Kuhlemeyer (ref 11) y están dados por las expresiones siguientes (fig 4).

$$a(kz) = \frac{n}{s} \left[ 1 - \left( \frac{1 - 2s^2}{k} \right) \frac{g'(kz)}{f(kz)} \right] \quad (7)$$

$$b(kz) = n \left[ 1 + \frac{f'(kz)}{k g(kz)} \right] \quad (8)$$

donde

$n = 1.08766$ , para Módulo de Poisson,  $\nu = 0.25$

$s^2 =$  constante elástica  $= \frac{1 - 2\nu}{2(1 - \nu)}$

$k =$  número de onda, es decir, relación entre frecuencia de oscilación y velocidad de propagación

$f(kz) =$  variación del desplazamiento horizontal con la profundidad de una onda Rayleigh en medio homogéneo

$g(kz) =$  variación del desplazamiento vertical con la profundidad de una onda Rayleigh en medio homogéneo

$$f'(kz) = \frac{df}{dz}$$

$$g'(kz) = \frac{dg}{dz}$$

Cuando las ondas de entrada y de salida corresponden al mismo tipo de ondas y dirección de propagación, se obtiene

$$\sigma = 2 a \rho c_p \dot{v}_1 - a \rho c_p \dot{v} \quad (9)$$

$$\tau = 2 b \rho c_s \dot{u}_1 - b \rho c_s \dot{u} \quad (10)$$

y las condiciones de frontera consisten en el doble sistema de amortiguadores de efectos longitudinales y de cortante, con constantes respectivas a  $\rho c_p$ , y  $b \rho c_s$  por unidad de ancho, sometidos en su base a desplazamientos iguales al doble de los correspondientes a las ondas de llegada.

Los principios anteriores se aplican a continuación a las fronteras AA', BB' y CC' de la fig 2.

### Frontera AA'

$\sigma_1$  y  $\tau_1$  corresponden a las ondas incidentes de Rayleigh (ref 11), para  $x = 0$  y  $z$  variable:

$$\sigma_1 = k \left[ (\lambda + 2G) f(kz) + \lambda g'(kz) \right] e^{i \omega t} \quad (11)$$

$$\tau_1 = Gki \left[ f'(kz) - g(kz) \right] e^{i \omega t} \quad (12)$$

Para las ondas de salida se adoptaron en este caso los valores  $a = 1$ ,  $b = 1$  en las ecs 5 y 6.

### Frontera BB'

Como en el caso anterior,  $\sigma_1$  y  $\tau_1$  corresponden a ondas incidentes de Rayleigh, pero ahora sus valores corresponden a  $z = z_0$  y  $x$  variable:

$$\sigma_1 = k \left[ (\lambda + 2G) f(kz_0) + \lambda g'(kz_0) \right] e^{i(\omega t - kx)} \quad (13)$$

$$\tau_1 = Gki \left[ f'(kz_0) - g(kz_0) \right] e^{i(\omega t - kx)} \quad (14)$$

Para ondas de salida se tomaron  $a = 1$ ,  $b = 1$ .

Los esfuerzos  $\sigma_1$  y  $\tau_1$  debidos a ondas de Rayleigh son muy pequeños a profundidades mayores que vez y media su longitud de onda. Dado que en el caso en estudio la frontera BB' se colocó a una profundidad  $z_0 = 2H$ , los esfuerzos en cuestión serán despreciables para ondas de Rayleigh in-

cidentes con longitud de onda menor que H.

### Frontera CC'

En este caso,  $\sigma_1$  y  $\tau_1$  son nulos. Para determinar a y b se siguió la formulación de Lysmer y Kuhlemeyer (ref 11), considerando las configuraciones que corresponden al movimiento causado por ondas Rayleigh al viajar a través de un medio estratificado (ref 14). Las expresiones (17) y (18) siguen siendo válidas, con los correspondientes valores de f y g asociados a un medio compresible que está soportado por un medio semi-infinito homogéneo, a saber,

$$f = -k (P \cosh Rz + Q \sinh Rz) + S(A \sinh Rz + B \cos Rz)$$

$$g = R(P \sinh Rz + Q \cosh Rz) - k(A \cosh Sz + B \sinh Sz),$$

para el estrato superior, y,

$$f = -kP'e^{rz} + sA'e^{sz}$$

$$g = rP'e^{rz} - kA'e^{sz}$$

para el medio subyacente

Donde,

P, Q, A, B, P', A' son constantes que se obtienen de las condiciones de frontera en la interfase y en la superficie libre (ref 13).

$$2\pi / \Omega \quad \text{período de las ondas,}$$

$$2\pi / k \quad \text{longitud de onda,}$$

$$V_r \quad \text{velocidad de ondas Rayleigh,}$$

$k_1, k_2$  número de onda de cortante, manto superficial y subyacente,

$h_1, h_2$  número de onda longitudinal, manto superficial y subyacente,

$$S^2 = k^2 - k_1^2; \quad s^2 = k^2 - k_2^2$$

$$R^2 = k^2 - h_1^2; \quad r^2 = k^2 - h_2^2$$

$k = \frac{\Omega}{V_r}$ , número de onda, obtenida a partir de la ecuación característica o de las curvas de dispersión correspondientes

En este trabajo se analizan casos en los que  $k^2 > k_1^2 > h_1^2$ .

Para el caso extremo en que las propiedades de los dos medios son iguales, las respuestas obtenidas del análisis de un modelo como el de la fig 2, con condiciones de frontera según los criterios expuestos en los párrafos anteriores, concuerdan razonablemente con las obtenidas analíticamente para un medio homogéneo.

### 3. VALORES DE LA AMPLIFICACION

#### 3.1 Casos analizados

En las figs 5 a 8 se presentan amplificaciones para diversos puntos en la superficie del manto superior, para cada frecuencia estudiada de las ondas de llegada, y en la fig 9 el valor máximo de la amplificación, sin importar el punto en donde se presenta. Las amplificaciones se comparan con las que se obtendrían según el modelo unidimensional de propagación vertical de ondas de cortante. En ambos casos, la amplifica-

ción se calcula como el cociente de la amplitud del desplazamiento para las condiciones estudiadas entre la que se presentaría de no ser afecta da por las condiciones locales.

La amplificación que sufren los desplazamientos de los puntos ubicados en el manto superficial (fig 1), con respecto a puntos ubicados en el me dio circundante, varía con la longitud de ondas incidentes y con la rela ción de impedancias\* existente entre los dos medios. A fin de cono cer la influencia de estos parámetros se estudiaron casos con rela ciones de impedancias igual a 0.22, 0.35, 0.58 y 0.73, excitados por ondas incidentes con frecuencias iguales a las primeras frecuencias na turales del estrato superior idealizado mediante un modelo unidimensio nal con comportamiento semejante al de una viga de cortante.

### 3.2 Resultados

De los análisis hechos se puede observar lo siguiente

- a) Para una frecuencia de excitación dada, la amplificación máxima disminuye a medida que la relación de impedancias entre el manto superficial y el que lo soporta aumen ta (fig 9).
- b) La amplificación máxima de la componente horizontal pa ra una frecuencia de excitación y una relación de impedan

\* Se entiende por impedancia el producto de la densidad de masa por la velocidad de ondas de cortante de un medio ( $\rho_i \cdot V_{S_i}$ ). En este trabajo el numerador de la relación de impedancias corresponde a las propiedades del manto superficial.

cias dadas, es en general mayor que la de la componente vertical, siendo más importante la diferencia para relaciones pequeñas de impedancia entre los medios (fig 9).

- c) Para relaciones de impedancia de 0.73, y longitudes de onda de 0.52 H y 0.78 H la amplitud es menor que en el medio circundante (fig 8a y b). Para esta misma relación de impedancias y longitud de onda de 1.25 H no existe amplificación sensible (fig 8c).
- d) La amplificación máxima de la componente de movimiento horizontal causada por ondas Rayleigh que inciden horizontalmente sobre dos medios con las características geométricas antes descritas y con relaciones de impedancia pequeñas ( $\leq 0.35$ ), es mayor que la obtenida del análisis de un modelo unidimensional con incidencia vertical de ondas de cortante, para las primeras frecuencias naturales del manto superficial. Para otras relaciones de impedancias, las amplificaciones de las ondas de Rayleigh pueden ser menores que las de las ondas de cortante. Los resultados del análisis de un modelo unidimensional se indican con flechas horizontales en la fig 9.

- e) Las figs 5 a 8 muestran que aun para distancias horizontales iguales a cinco veces el espesor del estrato superior ocurren variaciones importantes de amplitud de un punto a otro. En parte, tales variaciones se deben a la perturbación local ocasionada por la discontinuidad entre los dos medios en el tramo DE (fig 2). Es posible que las aproximaciones implícitas en las condiciones de frontera (fig 2) sean en parte responsables de las fluctuaciones en cuestión. Esto sugiere la conveniencia de desarrollar criterios de análisis para este problema en donde no haya que recurrir a condiciones de frontera como las citadas.
- f) Para el rango de relaciones entre longitudes de onda y espesor del manto superficial ( $\lambda_1/H$ ) estudiado, es posible la existencia de las ondas  $M_2$  de Sezawa (ref 14); sin embargo, estas no se consideraron en este estudio.

#### 4. CONCLUSIONES

Las amplificaciones del movimiento sísmico causadas por la presencia de estratos de material de baja rigidez son muy sensibles a los tipos de ondas que causan el movimiento en cuestión. A fin de predecir la influencia de las condiciones locales en las características de los temblores que pueden esperarse en un sitio dado es deseable estimar la

contribución de los distintos tipos de ondas a dichos temblores. Como es muy difícil extraer esta información de los registros de sismos reales, debe acudirse al desarrollo de modelos analíticos que simulen la fuente sísmica y la propagación de las ondas hasta la vecindad del sitio de interés.

Dada la escasez de resultados analíticos sobre la amplificación de ondas de Rayleigh en condiciones comparables a las que aquí se estudian, no fue posible estimar la precisión de los resultados que aquí se incluyen, ni determinar los errores que pueden haberse introducido como consecuencia de las aproximaciones implícitas en las condiciones de frontera; pero se verificó que para el caso de propiedades iguales para estrato superficial y manto inferior la solución concordaba exactamente con la del medio semi-infinito.

## 5. RECONOCIMIENTO

En la formulación de los programas de computadora se utilizó material proporcionado por G Ayala y R Aranda.

## 6. REFERENCIAS

1. Trifunac, M D, "Response envelope spectrum and interpretation of strong earthquake ground motion", Bull. Seism. Soc. Am, Vol. 61, No. 2 (1971) pp 343-356.
2. Trifunac, M D, "Investigation of strong earthquake ground motion", Doctoral Thesis, California Institute of Technology, Pasadena, Cal. (1969).

3. Nemani, D y Mal, A K, "Short period surface waves in a layered medium", Sixth World Conference on Earthquake Engng., Delhi (1977).
4. Mal, A K y Duke, C M, "Transfer functions for surface waves", Sixth World Conference on Earthquake Engng., Delhi (1977).
5. Ruiz, S E, "Influencia de las condiciones locales en las características de los sismos", Tesis de Maestría, DESFI-UNAM (1976)
6. Lysmer J y Waas G, "Shear waves in plane infinite structures", J Engng. Mech. Div. ASCE, Vol. 98 (1972), pp 85-105
7. Drake, L A, "Love and Rayleigh waves in non-horizontal layered media", BSSA, Vol. 62, P-2, (1972), pp 1241-1258
8. Drake L A, "Rayleigh waves at a continental boundary by the finite element method", BSSA, Vol. 62, (1972), pp 1259-1268
9. Drake L A, y Mal A K, "Love and Rayleigh waves in the San Fernando Valley", BSSA, Vol 62, P-2 (1972), pp 1673-1690
10. Knopoff L y Hudson J A, "Transmission of Love waves past a continental margin", Journal of Geophysical Research, Vol. 69, No. 8, (1964), pp 1649-1652
11. Lysmer J y Kuhlemeyer R L, "Finite dynamic model for infinite media", Journal of the Engng. Mech. Div. EM4, (1969), pp 859-875
12. Esteva L, "Microzoning: models and reality" contribution to a panel session on ground motion characteristics, Proc. Sixth World Conference Earthquake Eng Delhi (1977)
13. Lee A W, "The effect of geological structure upon microseismic disturbance", Monthly Not. Roy. Astron. Soc.: Geophys Suppl., 3, (1932), pp. 83-105
14. Kanai K, "On the  $M_2$ -waves (Sezawa-waves)", Bull. Earthq. Res. Inst., Vol. XXIV, (1950), pp 39-48

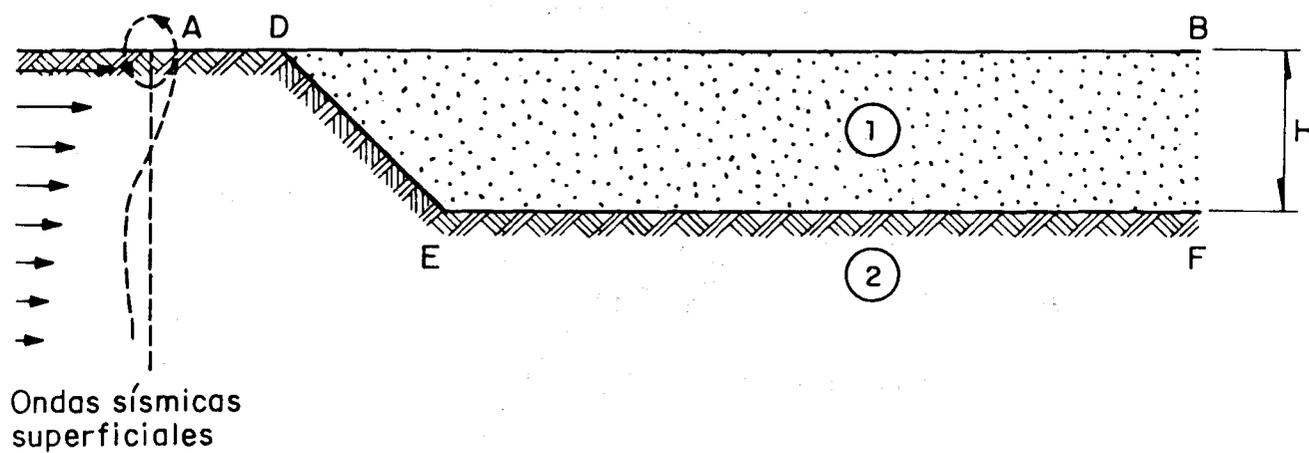


Fig 1 Condiciones locales

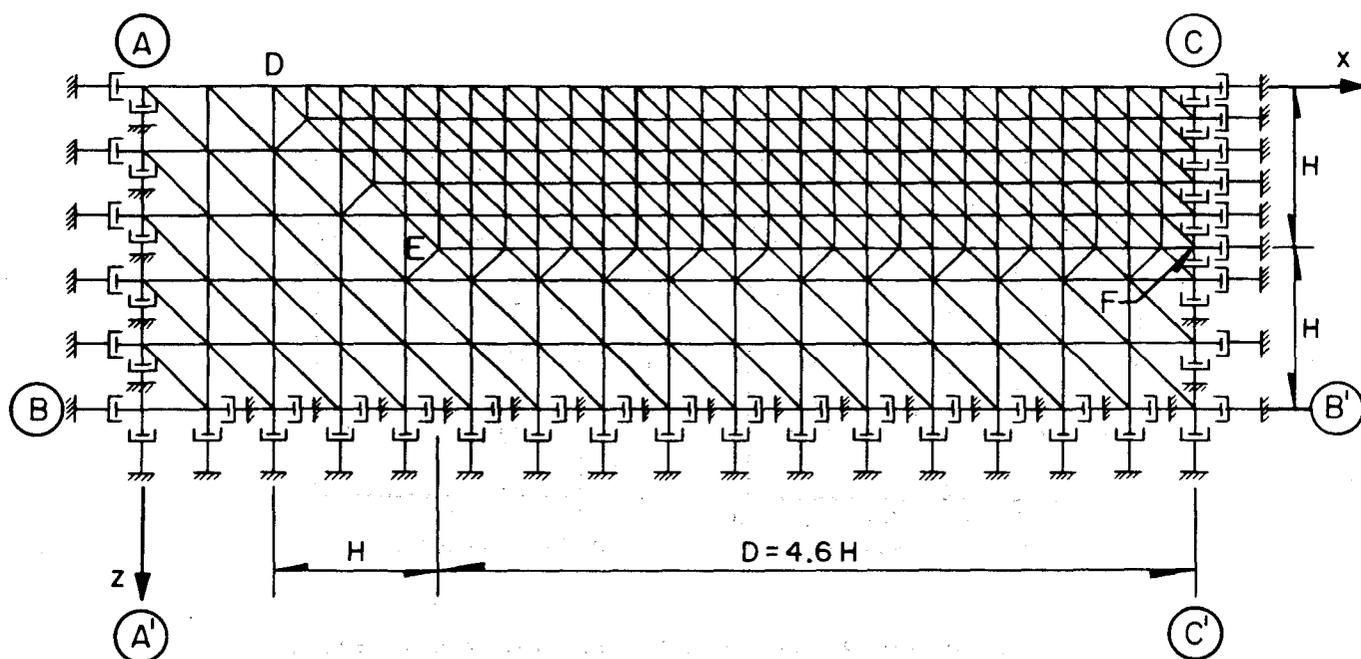


Fig 2 Modelo numérico

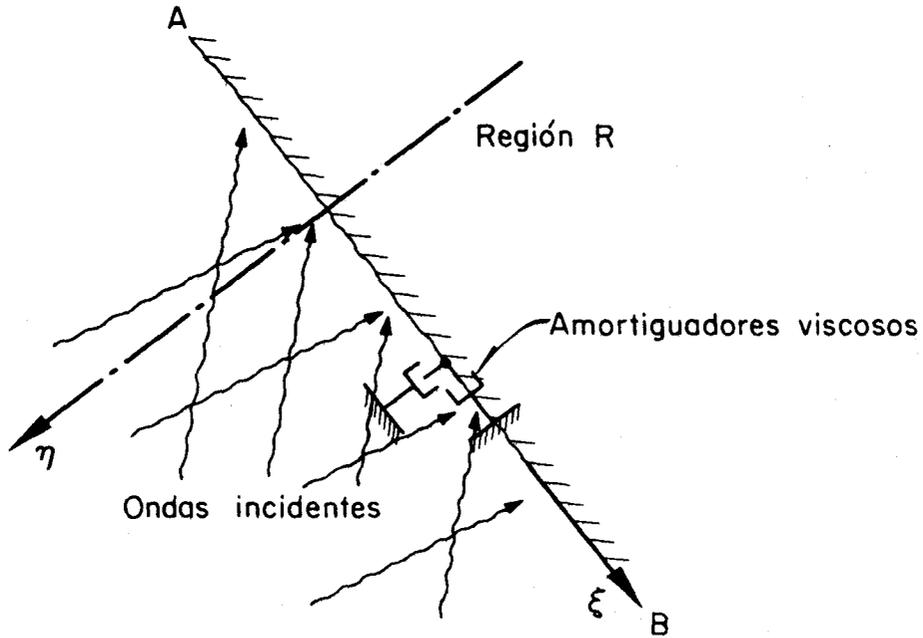


Fig 3 Condiciones de frontera

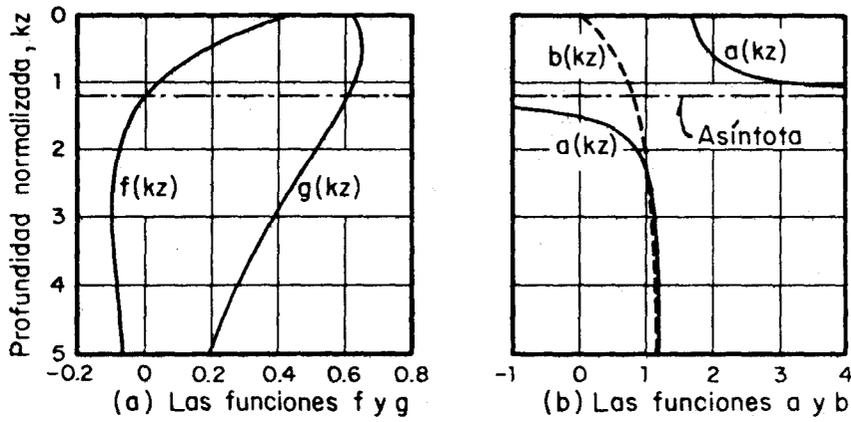


Fig 4 Onda Rayleigh en un semiespacio homogéneo, coeficiente de Poisson = 0.25, (ref 11)

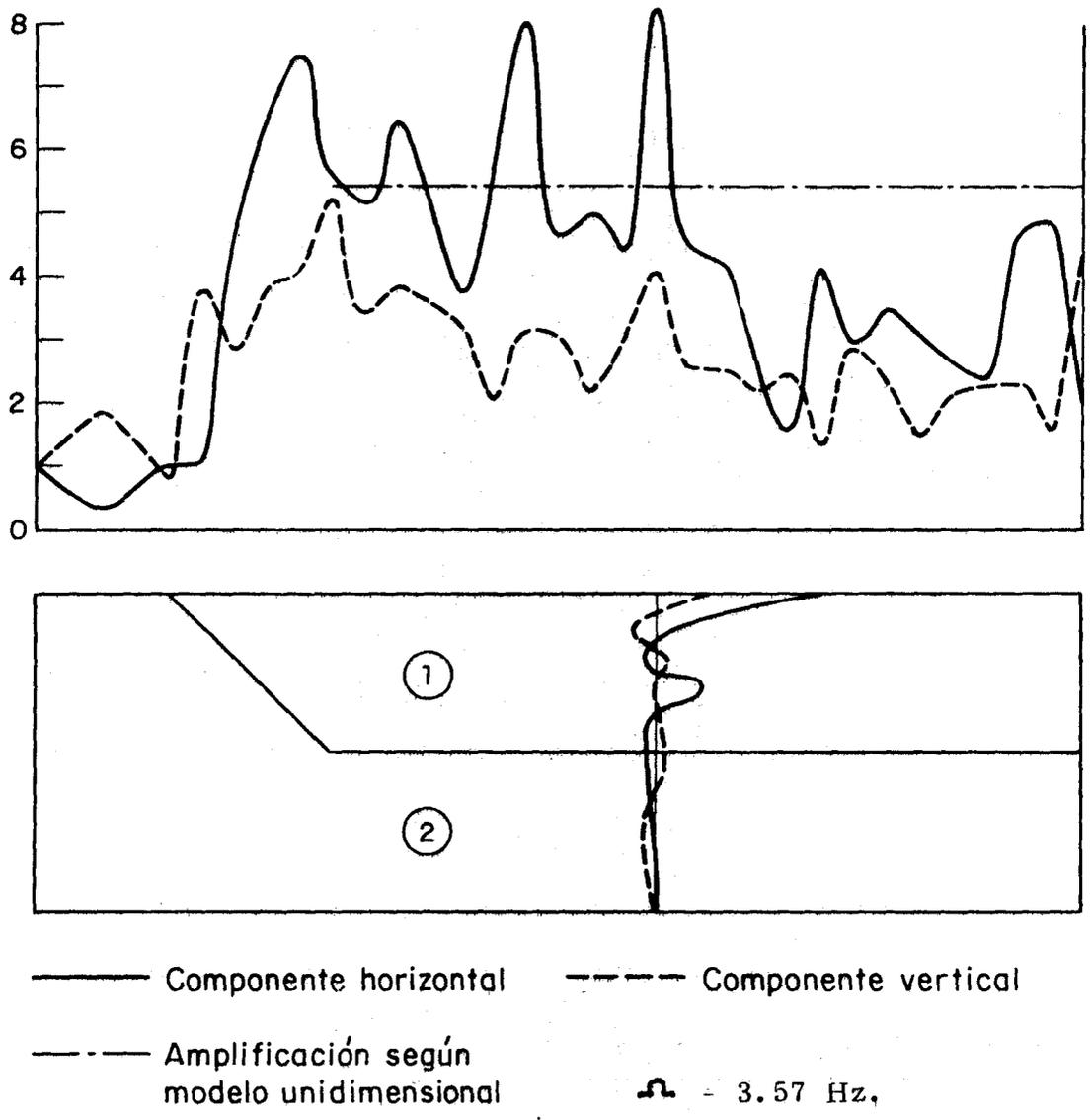


Fig 5a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0,22

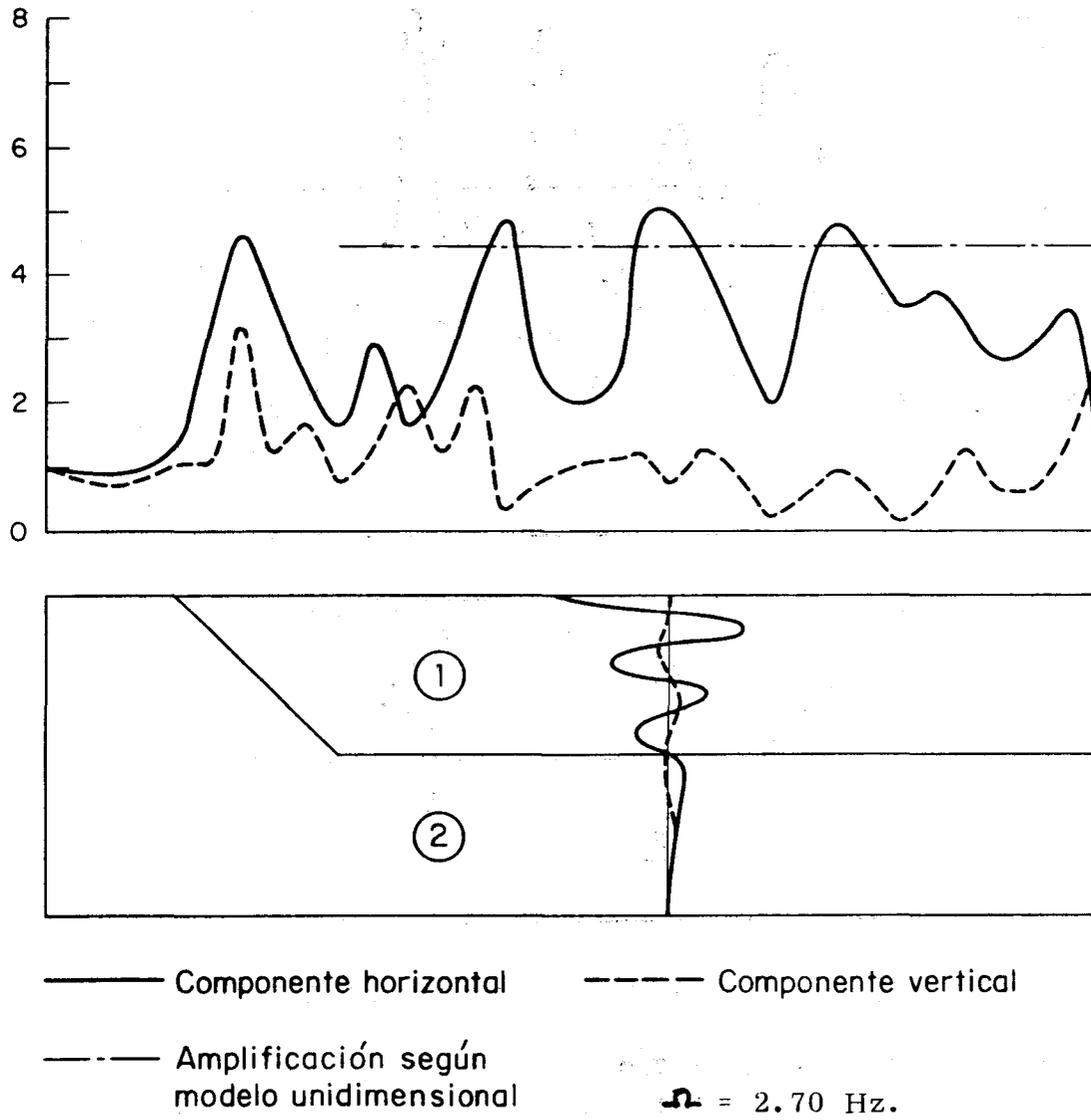


Fig 5b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

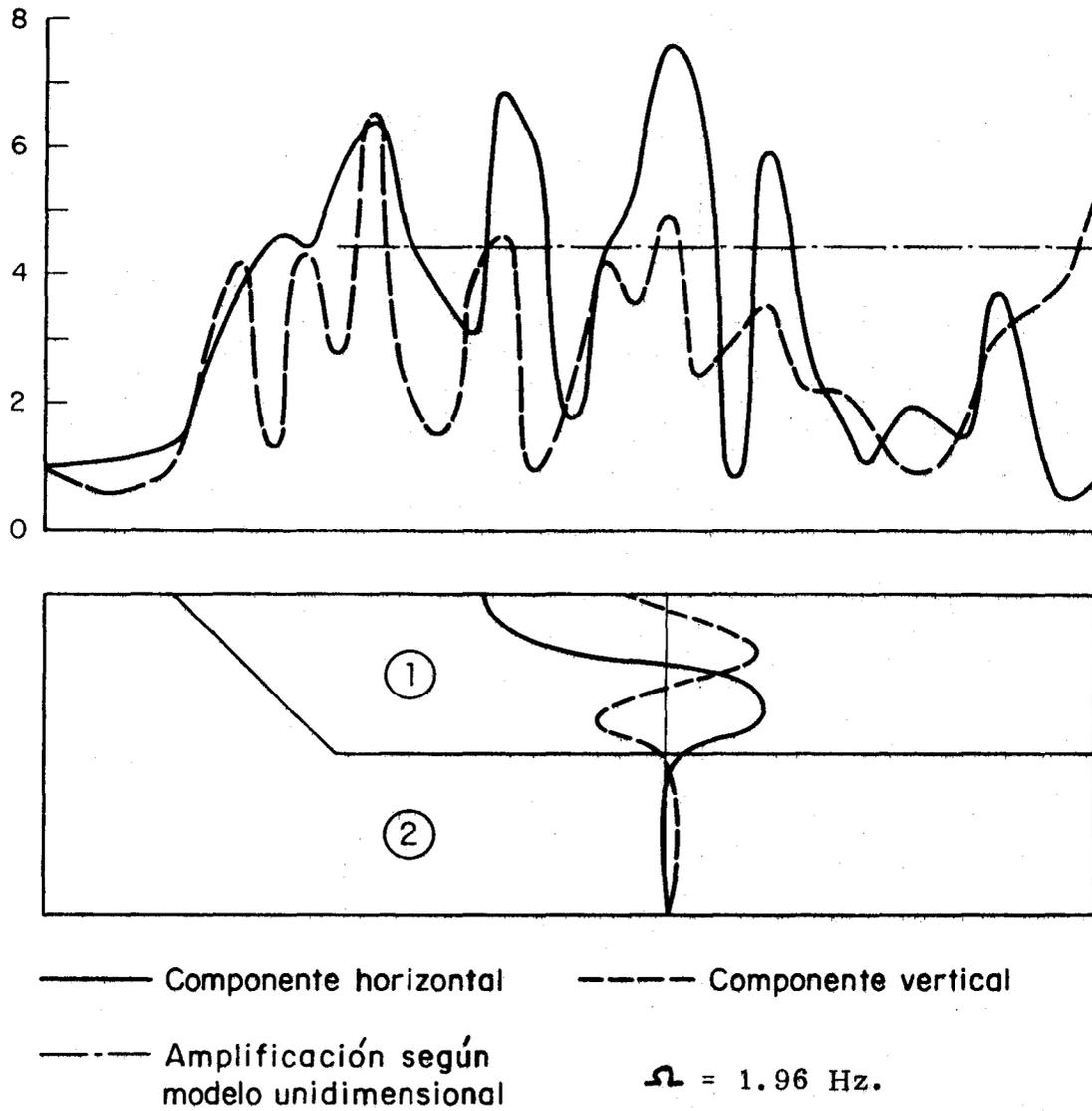


Fig 5c      Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

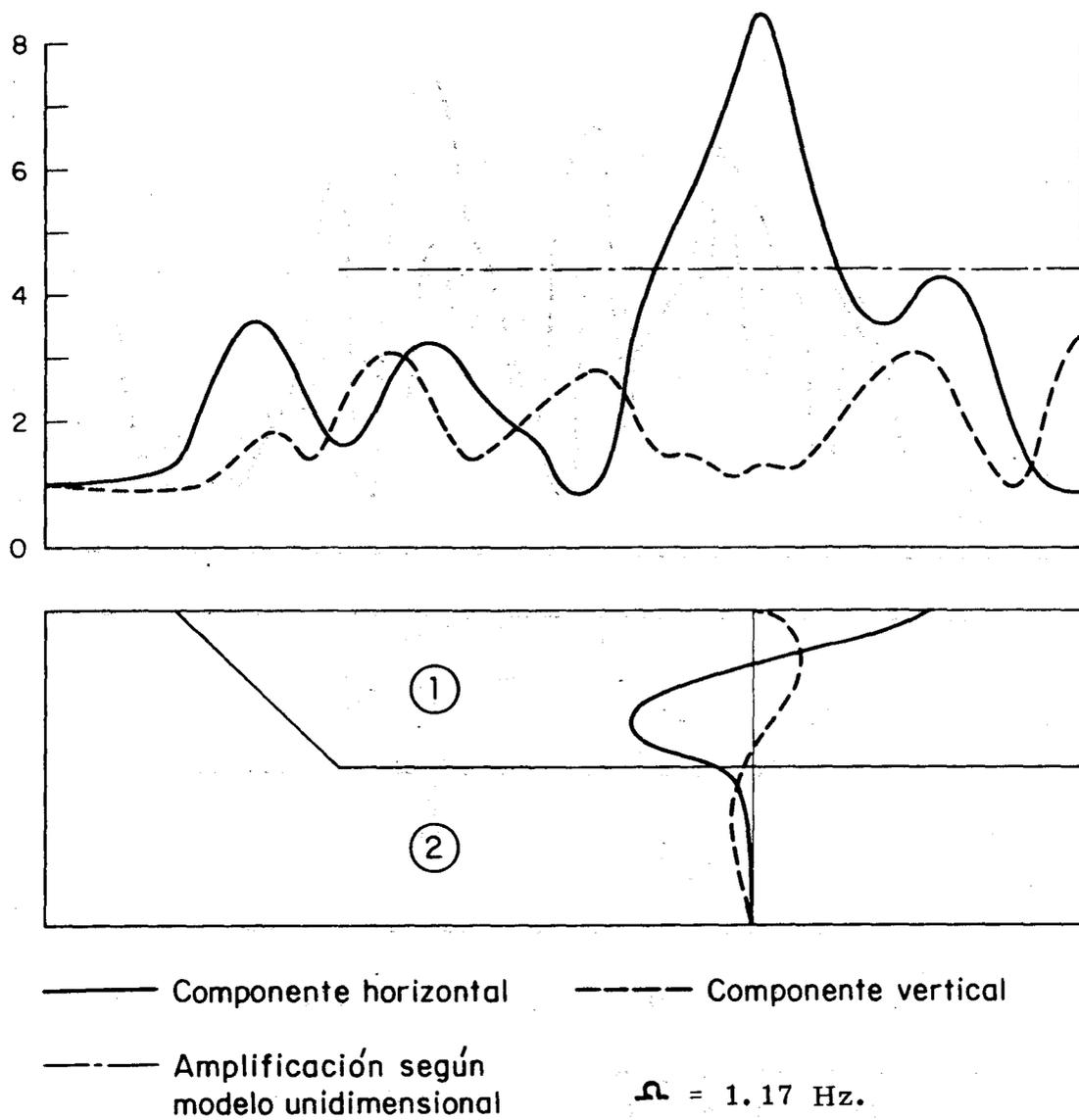


Fig 5d Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.22

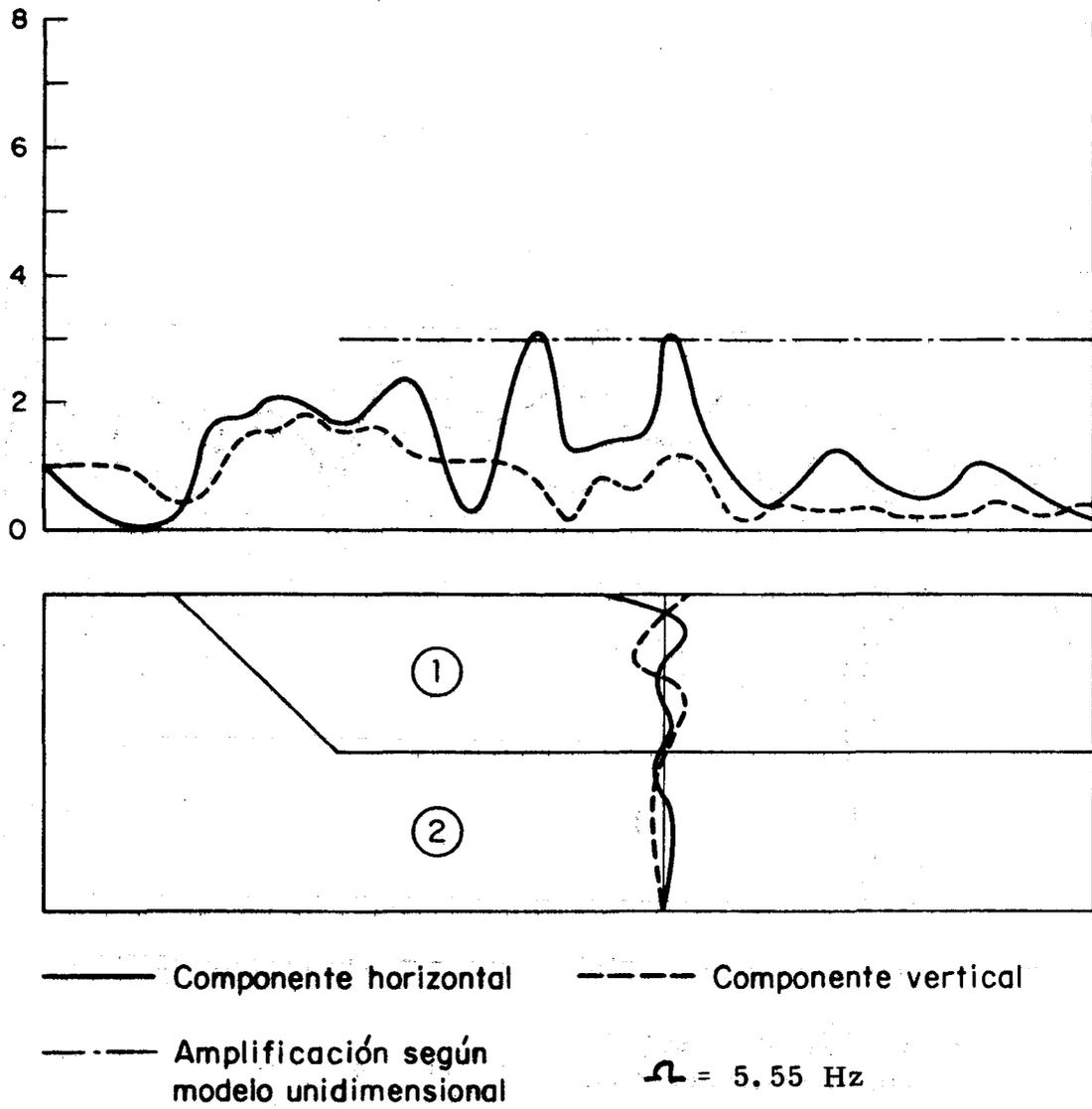


Fig 6a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

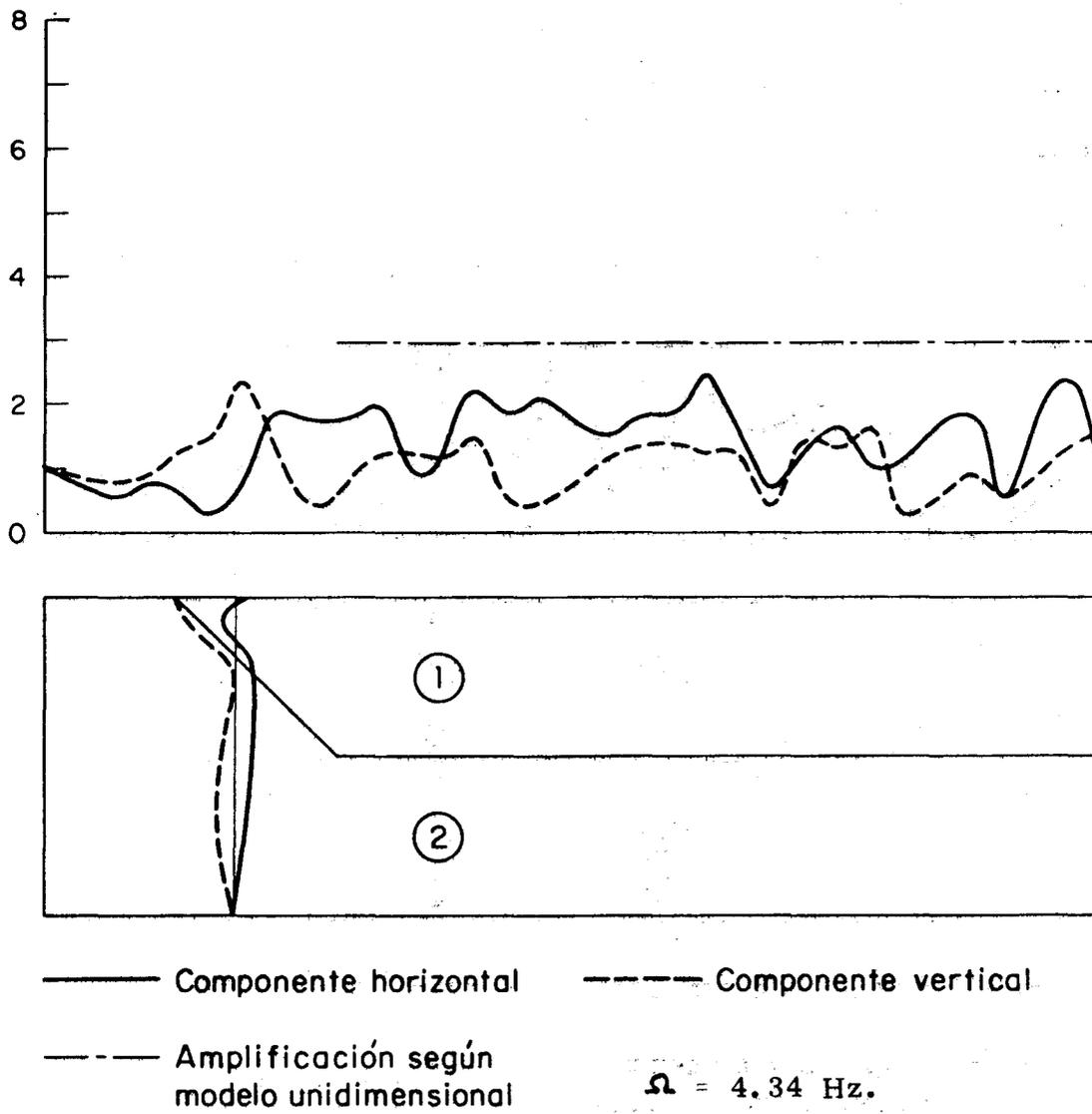


Fig 6b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35.

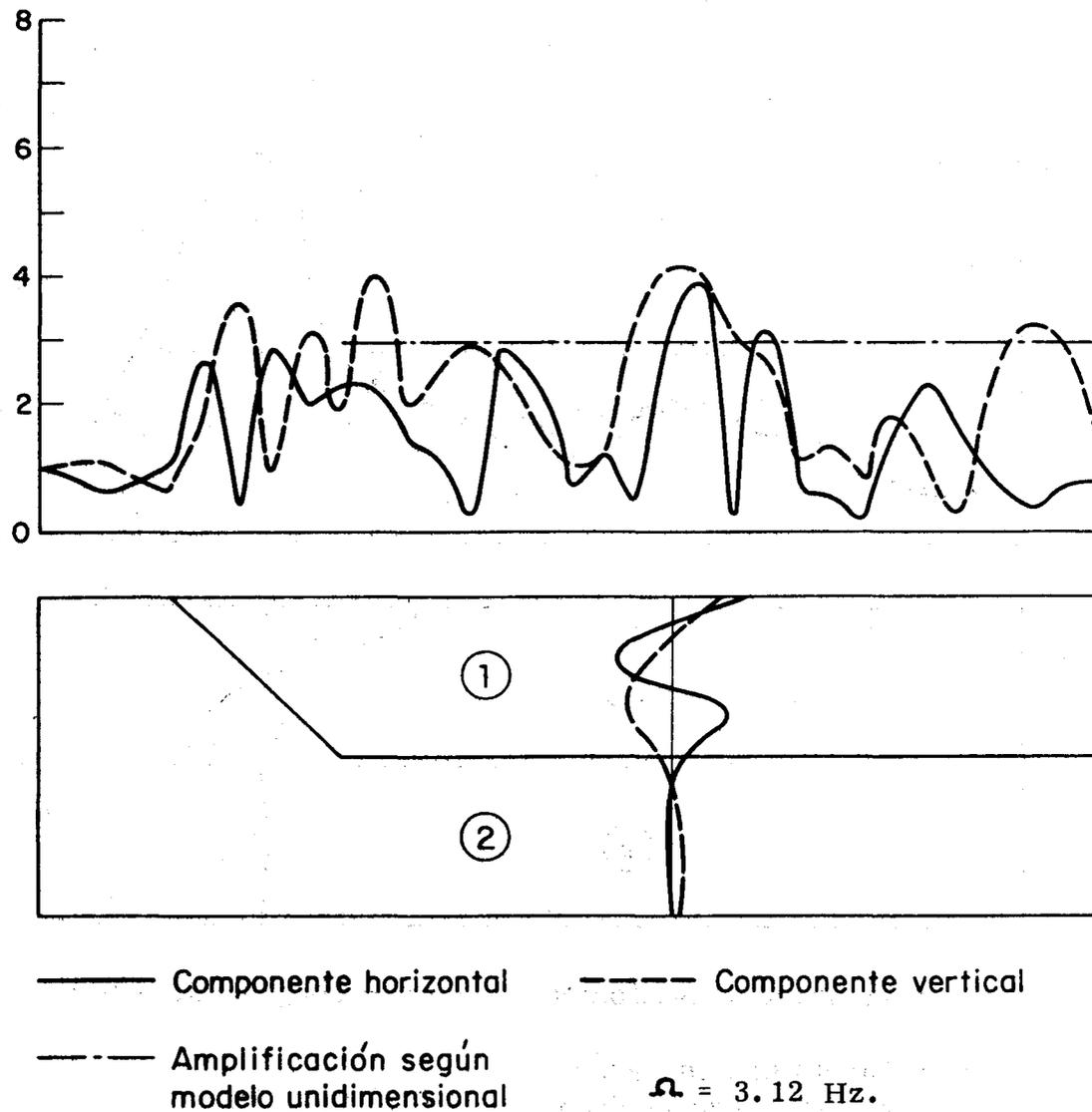


Fig 6c. Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

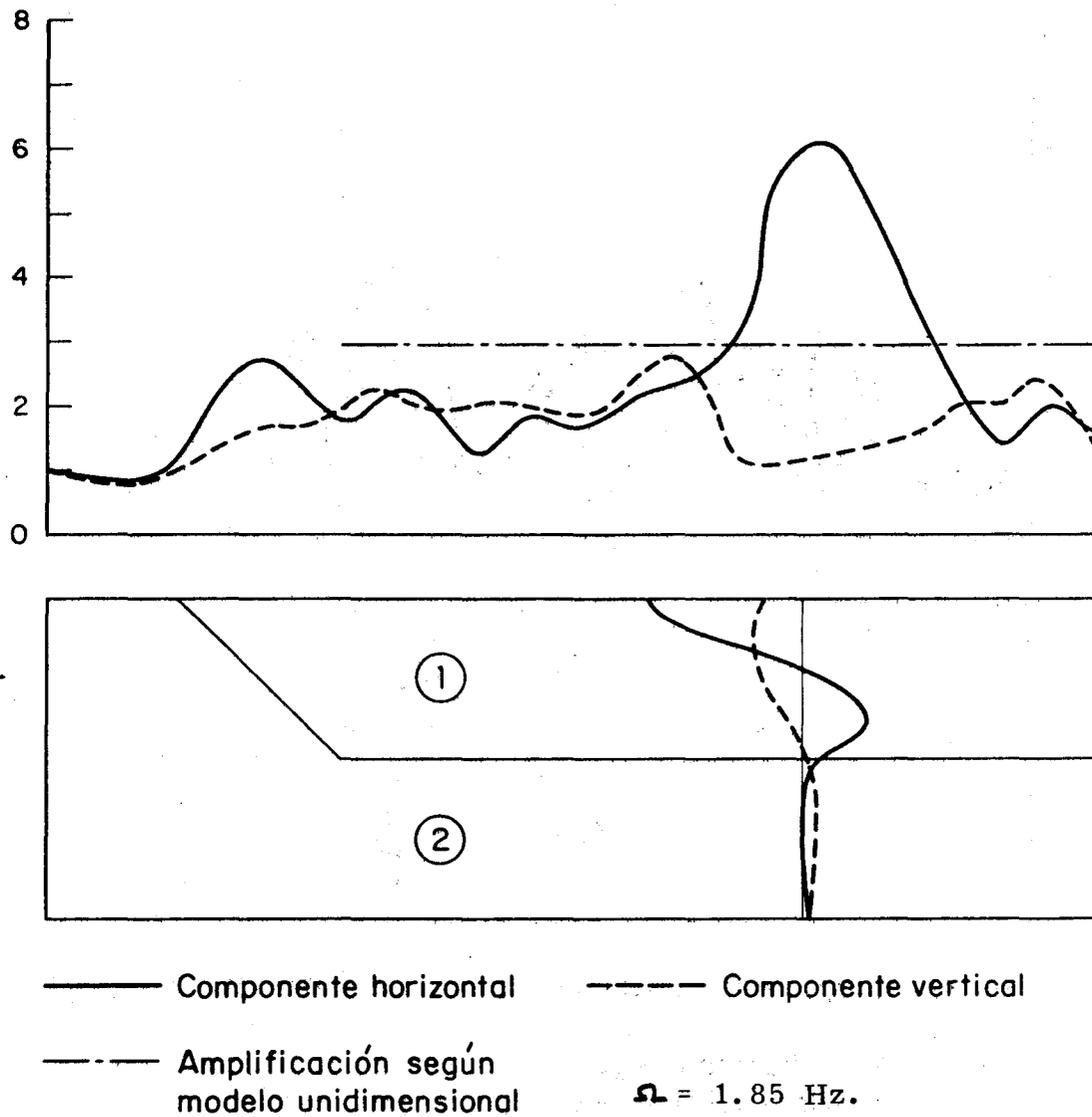


Fig 6d Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.35

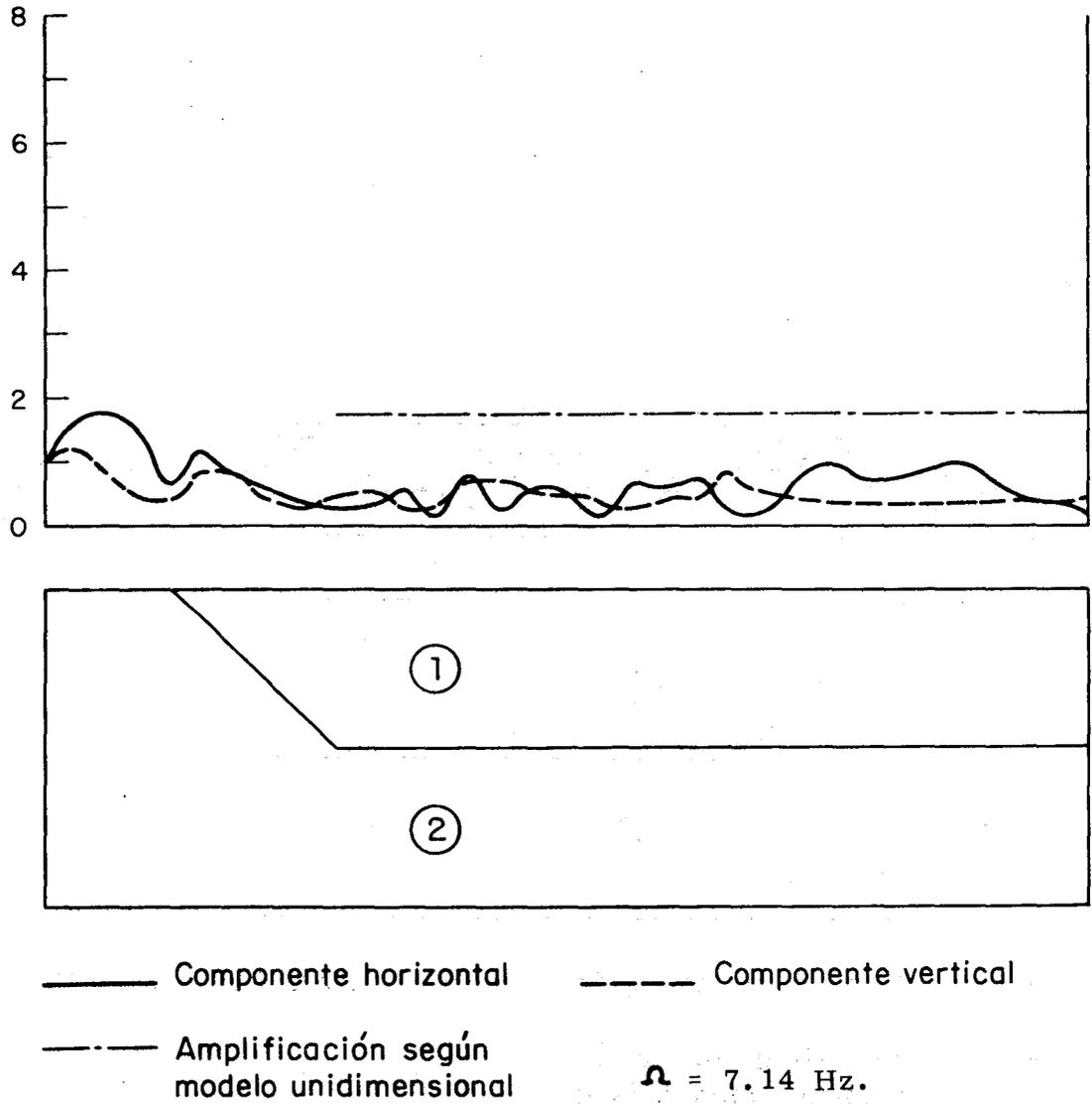


Fig 7a Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

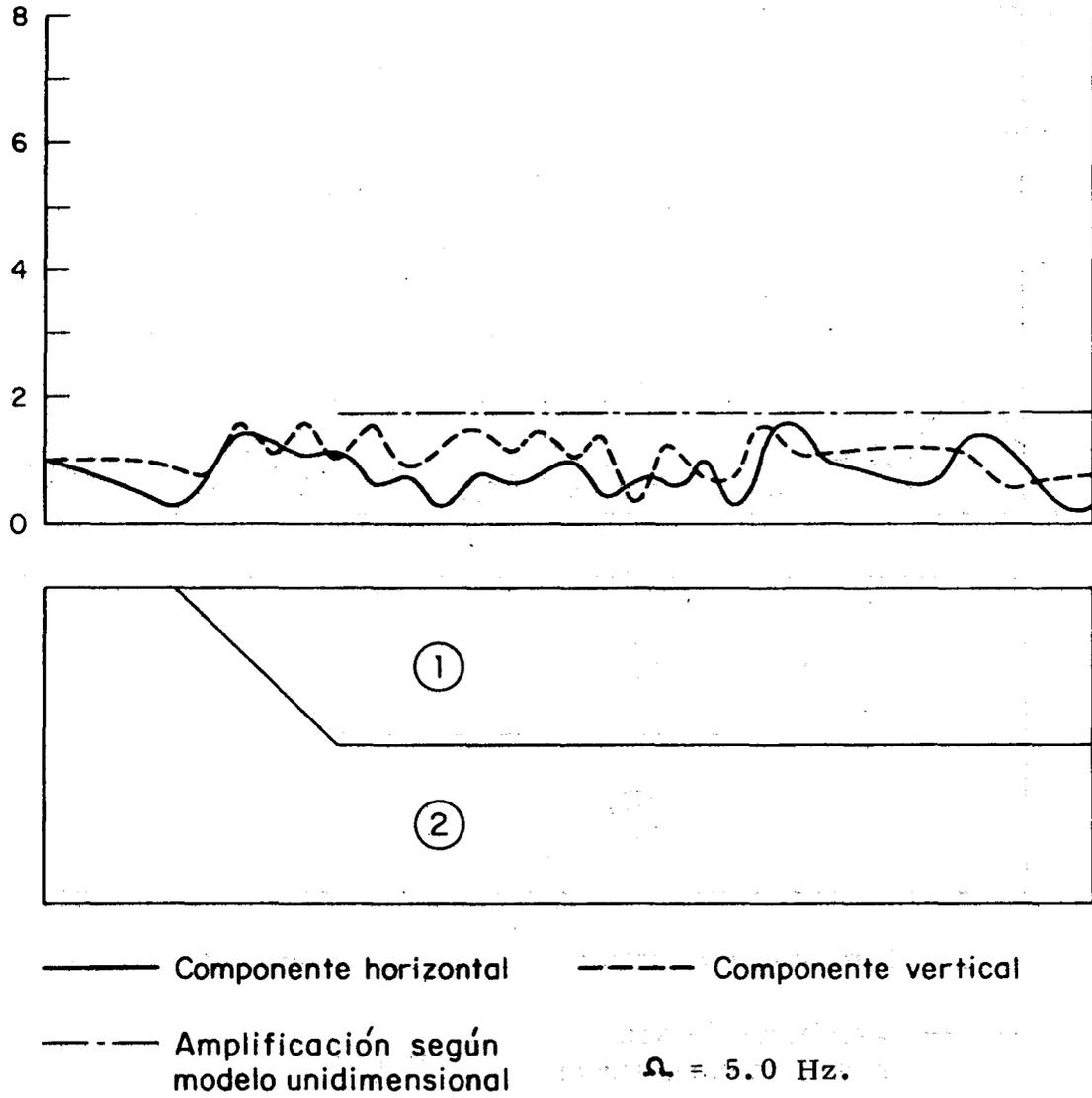


Fig 7b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

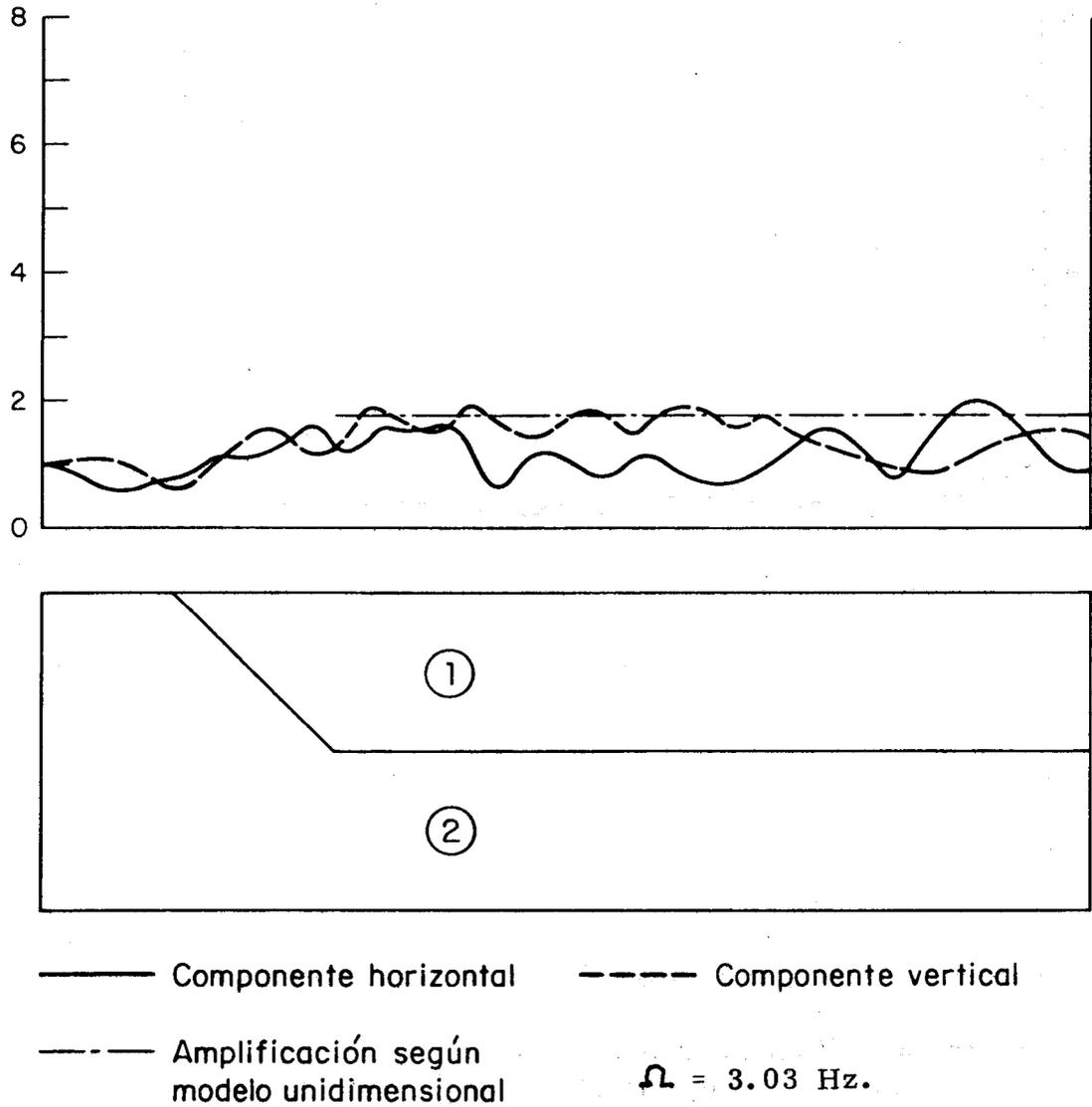


Fig 7c Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.57

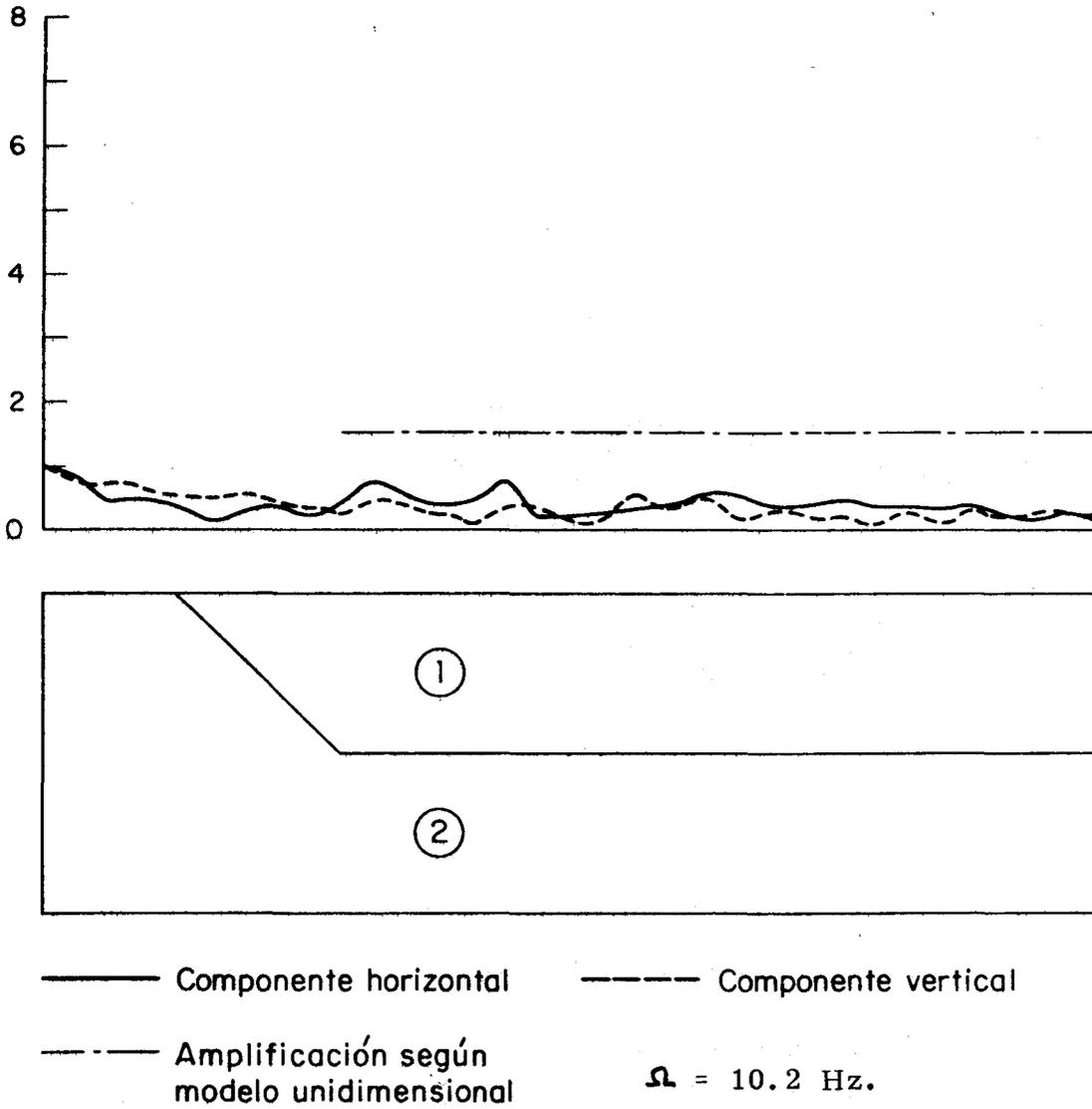


Fig 8a      Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73

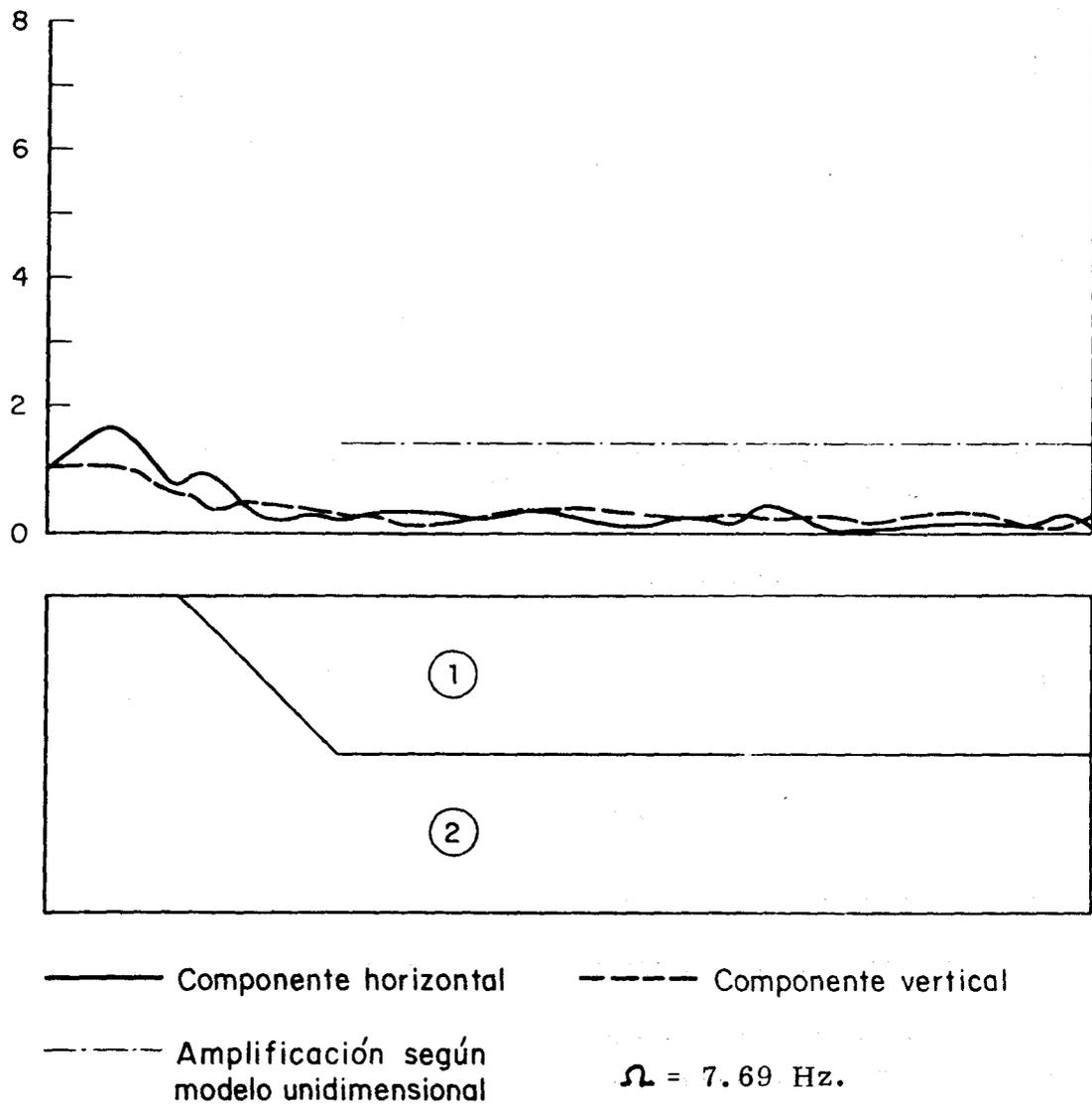


Fig 8b Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73

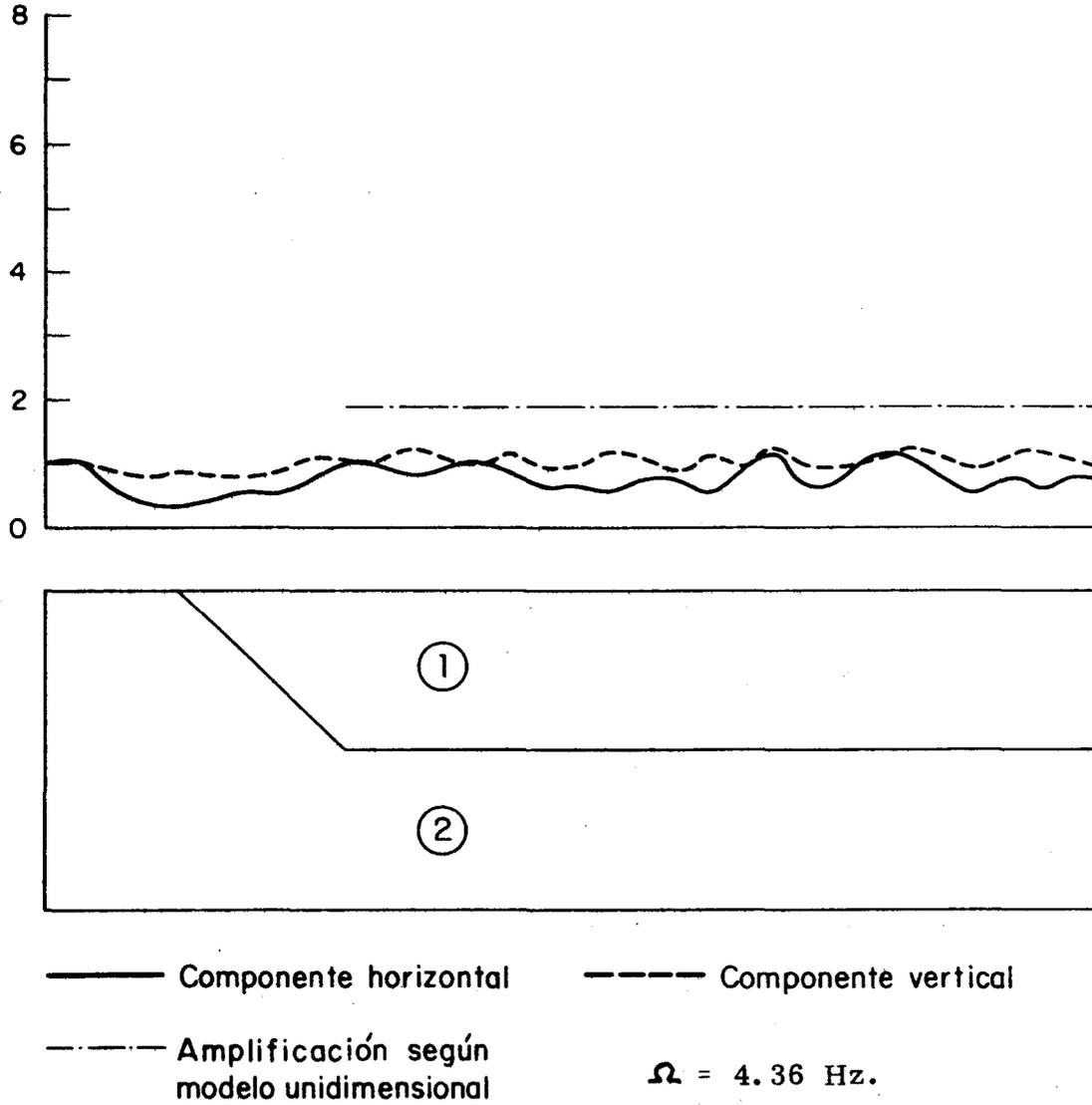
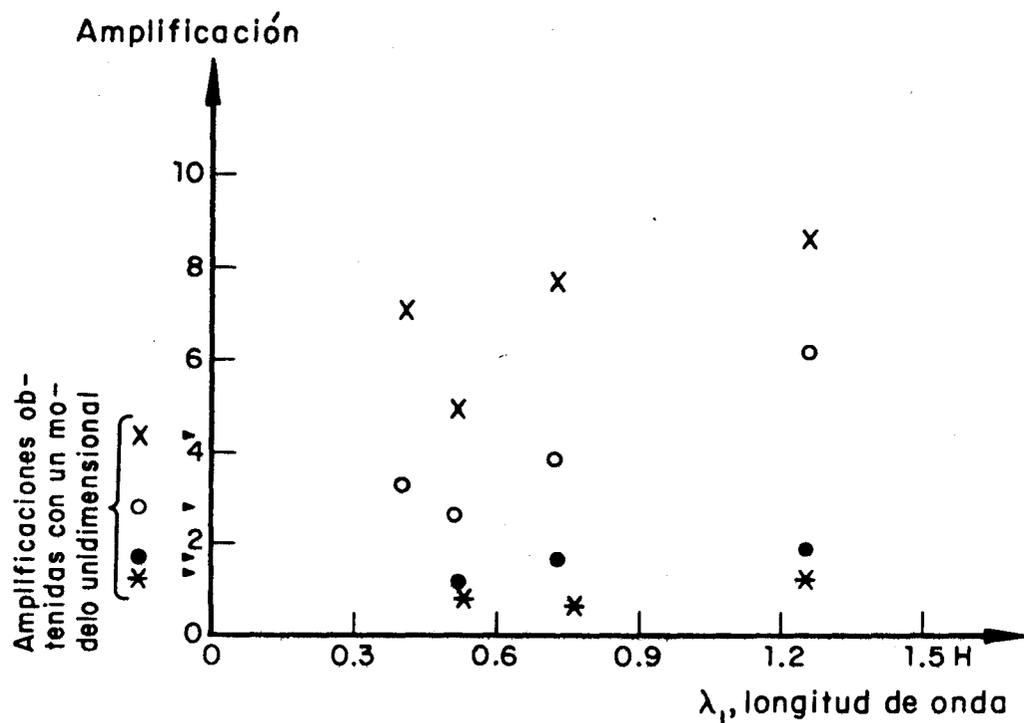
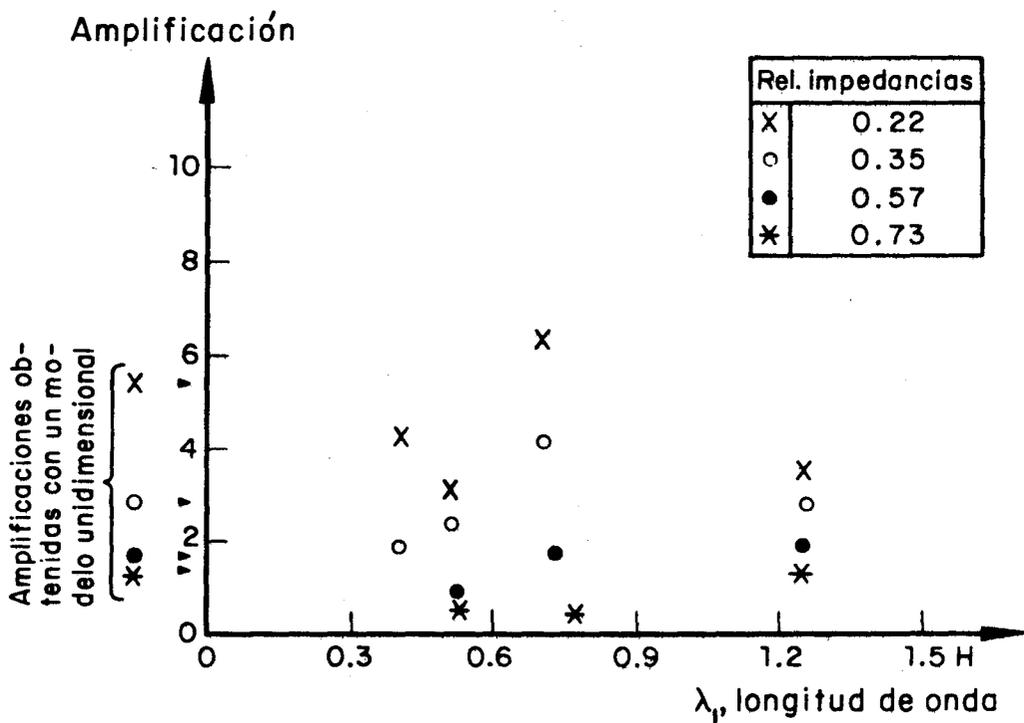


Fig 8c      Factor de amplificación de ondas de Rayleigh. Relación de impedancias = 0.73



a) Componente horizontal



b) Componente vertical

Fig 9 Factor de amplificación máximo de ondas de Rayleigh