

SOBRE EL ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON MUROS RIGIDIZANTES⁺

Enrique Bazán Zurita*

SUMMARY

A procedure is presented for the seismic analysis of buildings with shear walls. Such a procedure satisfies the requirements of the Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1976 (Federal District, Building Code, 1976). A simplified but accurate enough method is included for the analysis of frames and wall-frame systems under lateral loads.

RESUMEN

Se presenta un procedimiento para el análisis sísmico de edificios con muros rigidizantes de acuerdo con los requisitos del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, 1976. Se incluye también un método simplificado, pero suficientemente aproximado, para el análisis de marcos y de sistemas marco-muro ante cargas laterales.

+ Presentado en el Primer Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, 1977

* Instituto de Ingeniería, UNAM

SOBRE EL ANALISIS SISMICO DE EDIFICIOS CON MUROS RIGIDIZANTES

1. INTRODUCCION

El análisis sísmico estático de edificios usuales, y también una variante del análisis dinámico espectral, consisten en: 1) obtener las fuerzas laterales que representan la acción sísmica sobre el edificio en dos direcciones ortogonales, 2) distribuir estas fuerzas entre los elementos resistentes (marcos y/o muros) y 3) determinar los elementos mecánicos que se generan en los miembros de cada elemento resistente.

El Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal (ref 1) especifica cómo realizar el paso 1. En este trabajo se presentan procedimientos para efectuar los pasos 2 y 3 satisfaciendo las exigencias de este Reglamento. Los mismos métodos pueden aplicarse, casi sin modificaciones, cuando los edificios se encuentran en otros lugares o cuando se trate de cargas laterales distintas de las sísmicas.

La presentación es matricial porque cuando existen muros rigidizantes no es posible usar procedimientos tradicionales basados en el concepto de rigidez de entrepiso, la cual en este caso no se puede calcular con precisión antes de hacer el análisis.

2. ANALISIS TRIDIMENSIONAL DE EDIFICIOS

Para hacer el análisis tridimensional de edificios se aceptan las siguientes hipótesis:

- i) La estructura tiene un comportamiento elástico lineal.
- ii) El edificio está formado por sistemas planos rectangulares verticales, conectados horizontalmente por los sistemas de piso en cada uno de los niveles. La fig 1 muestra un sistema plano típico.
- iii) La rigidez de los sistemas de piso en su propio plano es infinita, por lo cual funcionan como diafragmas rígidos.
- iv) Los muros se representan adecuadamente como columnas anchas y se considera que las zonas de las vigas que están dentro de ellos no se deforman por flexión (fig 2).

- v) Se desprecia la rigidez torsional de vigas, columnas y muros.
- vi) Las fuerzas laterales están aplicadas a nivel de los sistemas de piso.

Las hipótesis (ii) y (iii) implican que cada sistema plano rectangular tiene sólo un grado de libertad horizontal por nivel, y que el edificio completo tiene tres: dos traslaciones en las direcciones de dos ejes ortogonales y una rotación alrededor de un eje normal al piso.

La hipótesis (v) fue propuesta por Frischman y otros (ref 3) y ha sido usada por varios autores (ref 4 y 5). En el desarrollo de este trabajo se han comparado sus resultados con soluciones obtenidas con elementos finitos y con métodos aproximados propuestos por Stamato y Stafford-Smith (ref 6); las diferencias no fueron significativas en ninguno de los casos estudiados. En una columna ancha, a diferencia de las normales, son significativas las deformaciones debidas a cortante; esto se incluye en análisis en la forma descrita en el apéndice A. La manera de tomar en cuenta que una viga tiene zonas indeformables en sus extremos se presenta en este mismo apéndice.

Con base en las hipótesis mencionadas, el análisis tridimensional de edificios puede hacerse de la siguiente manera:

- I) Se calcula la matriz de rigideces lateral K_j de cada sistema plano i .
- II) Se calcula la matriz de rigideces del edificio completo K .
- III) Para cada caso de fuerzas laterales F , se calculan los desplazamientos U del edificio completo, los desplazamientos laterales D_j de cada sistema plano, y los elementos mecánicos de las vigas, columnas y/o muros que los formen.

A continuación se describen dos métodos para ejecutar estos pasos:

2.1 Método general

Paso I. En cada sistema plano j se permiten los siguientes grados de libertad: un desplazamiento vertical y un giro en el plano del sistema por cada nudo, y un desplazamiento horizontal por cada nivel, como se ilustra en la

fig 3. La matriz de rigideces correspondiente a estos grados de libertad se obtiene sumando los aportes de las vigas, que pueden tener extremos infinitamente rígidos, y de las columnas, que pueden ser anchas. En el apéndice A se dan estas matrices. Si se tiene N nudos y L niveles la matriz resultante es de orden $2N \times L$, y de ella se eliminan los grados de libertad correspondientes a los nudos para obtener la matriz de rigideces lateral \underline{K}_i , de orden $L \times L$, en términos de solamente los desplazamientos de los niveles. El proceso de eliminación se denomina condensación estática y la forma eficiente de efectuarlo se describe en la ref 10.

Paso II. Se expresa la matriz de rigideces lateral \underline{K}_i de cada sistema plano en términos de los grados de libertad del edificio completo. Esta transformación se describe en detalle en el apéndice B, y se llama \underline{K}_i^* a la matriz resultante que es de orden $3L \times 3L$. La matriz de rigideces del edificio es: $\underline{K} = \sum_i \underline{K}_i^*$, también de $3L \times 3L$.

Paso III. Para calcular los desplazamientos laterales del edificio completo se resuelve el sistema $\underline{K} \underline{U} = \underline{F}$. En la ref 10 se discuten las formas eficientes de hacerlo. \underline{F} en general está formada por dos fuerzas ortogonales y un momento torsionante por cada nivel, que corresponden a los tres grados de libertad considerados para el edificio en tal nivel. Empleando las relaciones geométricas entre los desplazamientos laterales \underline{D}_i de cada sistema plano y los de los pisos del edificio \underline{U} , se calcula \underline{D}_i (véase la expresión B 3 del apéndice B).

Los desplazamientos correspondientes a los grados de libertad eliminados en el paso I se pueden calcular a partir de \underline{D}_i (ref 10). Así se conocen todos los desplazamientos de todos los nudos y, usando las matrices de cada viga o columna (apéndice A) se pueden calcular sus respectivos elementos mecánicos.

2.2 Método simplificado

Paso I. Para determinar la matriz de rigideces lateral de cada sistema plano i se usa un sistema plano reducido equivalente, descrito en la sección 3, que tiene mucho menos grados de libertad que el sistema original. La simplificación resulta, esencialmente, de que cada elemento

del sistema equivalente representa a varios elementos del sistema real.

A partir de las matrices de rigideces laterales de cada sistema plano j , se pueden efectuar los pasos II y III de la misma manera que en el método general, hasta el cálculo de \underline{D}_j .

Los giros de todos los nudos no fueron considerados en el paso I y, en consecuencia, no es posible calcularlos en forma directa a partir de \underline{D}_j . Pero puede usarse el método de distribución de momentos para calcular los momentos flexionantes, partiendo de momentos de empotramiento en las columnas que valen

$$M = \frac{6 EI \delta}{(1 + \alpha) h^2} ,$$

donde δ es el desplazamiento del entrepiso correspondiente, E , I , y h son, respectivamente, el módulo de elasticidad, el momento de inercia y la longitud total de la columna. En el apéndice A se explica cómo modificar los coeficientes de rigidez y factores de transporte para incluir el efecto de las deformaciones por cortante en las columnas, y la existencia de zonas extremas infinitamente rígidas en las vigas. Un problema que hay que notar en este procedimiento es que las fuerzas laterales \underline{F}_j que actúan en el sistema plano j valen $\underline{F}_j = \underline{K}_j \underline{D}_j$, y producen cortantes \underline{V}_j , en los entrepisos, por otro lado, la suma de momentos en columnas sobre las alturas da lugar a cortantes \underline{V}_j^* que no serán exactamente iguales a \underline{V}_j . Para subsanar esta dificultad se sugiere calcular en cada entrepiso i la relación $R_i = \underline{V}_{ji} / \underline{V}_{ji}^*$ y multiplicar los momentos de todas las columnas de ese entrepiso por R_i . Para conservar el equilibrio se pueden multiplicar los momentos en las vigas del piso i por $\frac{1}{2} (R_i + R_{i+1})$.

2.3 Observaciones y comentarios

De los métodos propuestos en las secciones, 2.1 y 2.2 se puede considerar como "exacto" el método general, en el sentido de que es la forma más precisa de proceder dentro de las limitaciones que imponen las hipótesis generales, por lo que se recomienda usar este método cuando se disponga de computadora y programas apropiados, como el que se presenta en la ref 9. Cuando no se cuenta con tales herramientas, puede usarse el método simpli

ficado.

El procedimiento general de análisis seguido en ambos métodos, sólo hace compatibles, mediante los pisos rígidos, los desplazamientos laterales de los niveles de todos los sistemas planos que forman el edificio. Los demás grados de libertad se consideran independientes de un sistema plano a otro, lo cual no es cierto para los desplazamientos verticales de las columnas que se encuentran en la intersección de dos sistemas planos y pertenecen a ambos. En forma aproximada se puede tomar en cuenta el acoplamiento de desplazamientos verticales en tales columnas, considerando que su carga axial es igual a la suma de las que les corresponden en cada uno de los sistemas planos a que pertenecen. También deben notarse que los giros de estas columnas sólo son independientes entre sí cuando los sistemas planos son ortogonales; por ésto, los métodos aquí propuestos no deben usarse cuando los sistemas planos que componen un edificio se corten en ángulos muy agudos en planta. Además, cuando los pisos son flexibles en su propio plano no es válida la suposición de que los sistemas planos están unidos por diafragmas infinitamente rígidos, lo cual invalida los procedimientos aquí propuestos.

En el método simplificado se usan matrices de rigideces laterales obtenidas en forma aproximada, sin embargo, los errores en los valores de los desplazamientos son pequeños (menores que el 3% en todos los casos estudiados). Una limitación más restrictiva de este método es que no toma en cuenta los grados de libertad verticales, lo que implica despreciar los efectos de alargamientos y acortamientos de columnas, que son importantes en edificios con vigas rígidas y/o gran relación altura-ancho. No se han establecido aún criterios definitivos para decidir cuándo estos efectos pueden despreciarse (la ref 11 considera que no son importantes para edificios con relación altura-ancho menor o igual a tres); sin embargo, debe notarse que si se toman en cuenta acortamientos y alargamientos de columnas, se modificarán más los desplazamientos laterales que los elementos mecánicos.

Para tener una idea de las diferencias de resultados entre los métodos general y simplificado se analizó con ambos un edificio de 6 pisos cuyas características y cargas se dan en la fig 8. En la tabla 1 se comparan re-

sultados obtenidos para dos sistemas planos de ese edificio, que son los que más se desplazan para las cargas consideradas; por lo que en ellos los errores serán más importantes. Nótese que el método simplificado conduce a errores menores que el 1%; aunque hay que señalar que en el método general no se permitieron desplazamientos verticales para que las diferencias se debieran exclusivamente al uso de sistemas planos reducidos.

3. SISTEMA EQUIVALENTE PARA CALCULAR LA RIGIDEZ LATERAL DE UN SISTEMA PLANO

Se trata de calcular la matriz de rigideces lateral de un sistema plano como el mostrado en la fig 1. Varios autores han estudiado este problema para proponer formas de determinar los elementos mecánicos correspondientes a los componentes del sistema (muros, vigas y columnas) cuando está sujeto a cargas laterales. (ref 6, 7 y 8). La citada matriz puede determinarse como se describe en la sección 2.1; lo cual es apropiado para programarse en una computadora grande, especialmente si se trata de un sistema plano con muchos nudos. Como no siempre se dispone de tal herramienta es conveniente tener un método simplificado que, sin pérdidas exageradas en la precisión, permita obtener la matriz de rigideces lateral con una computadora pequeña, o bien en forma manual. El método que aquí se propone logra este objetivo.

El componente básico del sistema equivalente es el conjunto de vigas y columnas mostrado esquemáticamente en la fig 5, en la cual se indican las cantidades que son necesarias para definirlo y los grados de libertad que le corresponden. Las alturas son las del sistema real. Cada columna y cada viga representan, respectivamente, a un conjunto de columnas o vigas del sistema plano real. Si E es el módulo de elasticidad, I , el momento de inercia, G , el módulo de cortante y Ω , el área efectiva de cortante de una columna o viga de sistema real, entonces las propiedades en cada nivel i del componente básico son:

$(EI)_i$ = Suma de EI de las columnas de un piso, que representa el componente.

$(G\Omega)_i$ = Suma de $G\Omega$ de las columnas de ese piso, que representa el componente.

$\left(\frac{EI}{L}\right)_i =$ Suma de $\frac{2EI}{\lambda} \left(\frac{1}{\lambda^3}\right)$ por cada vez que una viga llega a una columna representada en el componente (λ se define en la fig 4).

Dentro de las columnas se incluye a los muros. En columnas de dimensiones normales no es necesario considerar deformaciones por cortante y no se necesita el valor de $(G\Omega)_i$, que es indispensable para muros. Cuando una viga llega a un muro, λ tendrá un valor menor que 1; para vigas que llegan a columnas normales $\lambda = 1$.

Para construir el sistema equivalente se divide a las columnas del sistema plano en grupos tales que cada uno de ellos contenga columnas de propiedades similares. Se ha comprobado en este trabajo que los errores son pequeños si el valor de EI de la columna más rígida de un grupo no es mayor que ocho veces el de la columna menos rígida de ese mismo grupo. Generalmente son necesarios dos grupos: uno que contiene a las columnas normales y otro a los muros.

A cada grupo le corresponde un componente básico cuyas propiedades se calculan como ya se ha descrito en esta sección. Todos los componentes básicos que resulten se acoplan de modo que sus desplazamientos laterales sean los mismos, como se ilustra en la fig 6. Nótese que los componentes básicos pueden no tener el mismo número de niveles, que puede tratarse de un solo componente, en cuyo caso no se necesita el acoplamiento, y que los giros de un componente son independientes de los giros de los demás.

Se calcula la matriz de rigideces de cada componente, referida a todos sus grados de libertad (fig 5) y, por condensación estática (ref 10), se eliminan las rotaciones y se obtiene la matriz de rigideces lateral del componente. La matriz de rigideces lateral del sistema equivalente se obtiene sumando las de todos sus componentes básicos.

4. PROCEDIMIENTOS PARA EL ANALISIS SISMICO

Los métodos de análisis tridimensional expuesto en la sección 2 no se pueden usar directamente para el análisis sísmico de edificios de acuerdo con la ref 1, porque ésta exige, en su artículo 240, considerar dos combinaciones de las excentricidades de las fuerzas cortantes y, en su artículo 237,

estipula que se sumen vectorialmente los efectos de una componente del movimiento horizontal del terreno con 0.3 de los del otro. El procedimiento que a continuación se propone permite tomar en cuenta tales requisitos.

Considérese que la matriz de rigideces lateral del edificio \underline{K} se ha partido en la forma:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{bmatrix}$$

donde los subíndices L y θ se refieren, respectivamente, a los desplazamientos laterales y a los giros de los pisos del edificio. Entonces se pueden seguir los pasos siguientes:

- a) Se escogen dos direcciones ortogonales X y Y en la planta del edificio.
- b) Para cada dirección:
 - b.1. Se determina la fuerza horizontal aplicada en el centro de masas de cada piso i, de acuerdo con los artículos 240 o 241 de la ref 1. Sea \underline{F} el vector formado por estas fuerzas.
 - b.2. Se calculan los desplazamientos laterales $\underline{\delta}_0$ del edificio, sin permitir giros en los pisos:

$$\underline{\delta}_0 = \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{F}$$

- b.3. Se calculan los momentos debidos a la excentricidad directa, \underline{M}_d ,

$$\underline{M}_d = - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_0$$

y se los acumula para obtener los momentos torsionantes en los entrepisos, \underline{M}_d^* .

- b.4. Se calculan los momentos torsionantes en los entrepisos \underline{M}_a^* . Para el entrepiso i se tiene:

$$M_{ai}^* = 0.1 b_i V_i$$

donde b_i es la dimensión máxima de la planta i del edificio, medida perpendicularmente a la dirección en que están aplicadas las fuerzas sísmicas, y V_i , el cortante en el entrepiso i.

- b.5 Para cada nivel i se calculan las siguientes combinaciones de momentos torsionantes:

$$M_{1i}^* = 1.5 M_{di}^* + M_{ai}^*, \text{ y } M_{2i}^* = M_{di}^* - M_{ai}^*$$

- b.6 Con los valores obtenidos en el paso anterior se calculan los respectivos momentos M_1 y M_2 en los niveles, de la misma manera que se calculan las fuerzas aplicadas en los niveles a partir de las fuerzas cortantes en los entrepisos; es decir, en cualquier nivel el momento aplicado es la diferencia entre el momento torsionante del entrepiso inferior y el del entrepiso superior.
- b.7 Se calculan los giros y desplazamientos que producen los momentos M_1 y M_2 resolviendo los sistemas de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} K_{LL} & K_{L\theta} \\ K_{L\theta}^T & K_{\theta\theta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_j \\ \theta_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ M_j \end{bmatrix}, \quad j = 1, 2$$

- b.8 La ref 1 exige dos combinaciones de giros y desplazamientos:

Combinación	Desplazamientos	Giros
(1)	$\delta_0 + \delta_1$	θ_1
(2)	$\delta_0 + \delta_2$	θ_2

Para todos los niveles de cada sistema plano m se calculan los desplazamientos de entrepiso producidos por estas combinaciones y se escogen los que tengan mayor valor absoluto. Sea Z_m^x el vector formado por estos valores cuando el sismo actúa en la dirección x , y Z_m^y el correspondiente a la dirección Y .

- c) Para cada entrepiso i de cada sistema plano m se calculan $(Z_{mi}^x + 0.3 Z_{mi}^y)$ y $(0.3 Z_{mi}^x + Z_{mi}^y)$. Se utilizará el mayor de estos valores para calcular los elementos mecánicos producidos por el sismo.

En el apéndice C se presenta un procedimiento eficiente para efectuar las operaciones matriciales necesarias para el cálculo de giros, desplazamientos y momentos torsionantes.

Cuando las fuerzas laterales se determinan por el método dinámico espectral es también útil la matriz de rigideces lateral del edificio \underline{K} . Si denominamos \underline{K}_{xx} a la submatriz asociada a los desplazamientos en la dirección X , entonces los vectores modales $\underline{\phi}$ y las respectivas frecuencias de vibración ω en tal dirección se obtienen resolviendo el problema de valores característicos $\underline{K}_{xx} \underline{\phi} = \omega^2 \underline{M} \underline{\phi}$, donde \underline{M} es una matriz diagonal cuyos elementos son las masas concentradas en los niveles. Los métodos para resolver este problema se discuten ampliamente en la ref 10. Lo mismo puede decirse para la dirección Y , y si se desea considerar las torsiones en planta se debe usar la matriz \underline{K} completa.

5. RECONOCIMIENTO

Este artículo está basado en el aporte del autor a la ref 2, trabajo que fue patrocinado por INFONAVIT. Se agradece a Roberto Meli la revisión crítica del artículo, y a Luis Esteva sus valiosas sugerencias.

6. REFERENCIAS

1. "Requisitos de Seguridad y Servicio para las Estructuras, Título IV del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, con Comentarios", Informe 400 Instituto de Ingeniería, Jul, 1977.
2. Bazán, E. y Barousse, E. "Análisis ante cargas laterales de edificios a base de muros de carga", Informe Instituto de Ingeniería, Jun. 1976.
3. Frischman, W.W., Prabhu, S.S. y Toppler, J.F. "Multistory frames and interconnected shear walls, subjected to lateral loads", Concrete and Construction Engineering, 1963.
4. MacLeod, I.A., "Lateral stiffness of shear walls with openings, in tall buildings", Proc. of a Symposium on Tall Buildings, Pergamon Press, 1967.
5. Clough, R.M., King, I.P. y Wilson, E.L. "Structural analysis of multi-storey buildings", Proc. ASCE, Vol. 90, 1964.
6. Stamato, M.C. y Stafford-Smith, B., "An approximate method for the three dimensional analysis of tall buildings", Proc. Inst. Civ. Engrs., Vol. 43, Jul, 1969.
7. Khan, F.R. y Sbarounis, J.A., "Interaction of shear walls and frames", Proc. ASCE, Jun, 1964.
8. Rosenblueth, E. y Holtz, I., "Elastic analysis of shear walls in tall buildings", Proc. ACI, Vol. 56, Jun, 1960.
9. Wilson, E.L. y Dovey, "Three dimensional analysis of building systems TABS", publicación EERC 7-8, University of California, Berkeley, 1972.
10. Bathe, K.J. y Wilson, E. "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Prentice Hall, 1976.
11. Comité ACI 442, "Response of buildings to lateral forces", ACI Journal Vol. 68, Feb, 1971.

Tabla 1. Comparación de desplazamientos laterales (m) de los sistemas planos III III y aa, cuando el sismo actúa en las direcciones X e Y, respectivamente

	Sistema plano III III, fuerza sísmica en X			Sistema plano aa, fuerza sísmica en Y		
Nivel	MS	MG	error(%)	MS	MG	error(%)
1	0.000754	0.000756	0.26	0.001358	0.001362	0.29
2	0.001773	0.001778	0.28	0.003176	0.003190	0.44
3	0.003023	0.003033	0.33	0.005383	0.005412	0.54
4	0.004433	0.004449	0.36	0.007902	0.007949	0.59
5	0.005883	0.005908	0.42	0.010477	0.010547	0.66
6	0.007298	0.007334	0.49	0.012969	0.013066	0.74

MS Método simplificado

MG Método general

APENDICE A - Matrices de rigideces de una viga con zonas extremas infinitamente rígidas y de una columna incluyendo deformaciones de cortante.

Para los grados de libertad y los parámetros β , γ , λ definidos en la fig 4b la matriz de rigideces de una viga con extremos infinitamente rígidos es:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4 + 12 \frac{\gamma}{\lambda} (1 + \frac{\gamma}{\lambda}) & & & \text{simétrica} & & \\ 2 + 6 (\frac{\gamma + \beta}{\lambda}) + 12 \frac{\gamma\beta}{\lambda^2} & & & 4 + 12 \frac{\beta}{\lambda} (1 + \frac{\beta}{\lambda}) & & \\ \frac{EI}{\lambda\ell} & -\frac{6}{\lambda\ell} (1 + \frac{2\gamma}{\lambda}) & & -\frac{6}{\lambda\ell} (1 + \frac{2\beta}{\lambda}) & & \frac{12}{\lambda^2\ell^2} \\ & \frac{6}{\lambda\ell} (1 + \frac{2\gamma}{\lambda}) & & \frac{6}{\lambda\ell} (1 + \frac{2\beta}{\lambda}) & & -\frac{12}{\lambda^2\ell^2} \\ & & & & & \frac{12}{\lambda^2\ell^2} \end{array} \right]$$

donde E, I, ℓ son, respectivamente, el módulo de elasticidad, el momento de inercia y la longitud total de la viga. Para los grados de libertad definidos en la fig 4a la matriz de rigideces de una columna, incluyendo deformaciones de cortante, es:

$$\left[\begin{array}{cccc|cc} \frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} & & & & & \\ \frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} & & & & & \\ \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & & & & & \\ \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} & & & & & \\ 0 & & & & & \frac{EA}{h} \\ 0 & & & & & -\frac{EA}{h} \end{array} \right] \begin{array}{l} - \\ \frac{12 EI}{(1 + \alpha)h^3} \\ \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} \\ \frac{6 EI}{(1 + \alpha)h^2} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \text{simétrica} \\ \frac{(4 + \alpha) EI}{(1 + \alpha)h} \\ \frac{(2 - \alpha) EI}{(1 + \alpha)h} \\ \frac{(4 + \alpha) EI}{(1 + \alpha)h} \\ 0 \\ 0 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \frac{EA}{h} \\ \frac{EA}{h} \end{array}$$

donde $\alpha = \frac{12 E I}{h^2 G \Omega}$

y E, I, h y G, son, respectivamente, el módulo de elasticidad, el momento de inercia, la altura, y el módulo de cortante de la columna; Ω es su área reducida por cortante, la reducción depende de la distribución de cortante en la sección, el cual a su vez depende de la forma de esta. Para seccio-

ciones rectangulares $\Omega = A/1.2$, donde A es el área total de la sección de la columna.

En el caso de la viga nótese que si $\beta = \gamma = 0$; es decir, si no existen extremos rígidos, se tiene $\lambda = 1$ y la matriz de rigideces que se obtiene reemplazando estos valores coincide con la ya conocida para una viga normal.

También en las columnas, si no se desea considerar deformaciones por cortante, $\alpha = 0$ y la matriz de rigideces se convierte en la ya conocida para este caso.

De estas matrices pueden obtenerse coeficientes de rigidez y factores de transporte modificados para usar el método de Cross. Por ejemplo, cuando se desea considerar deformaciones por cortante, en vez de $\frac{4EI}{h}$ hay que usar $\frac{(4 + \alpha) EI}{1 + \alpha h}$ y el factor de transporte en vez de 0.5 será: $\frac{(2 - \alpha)}{4 + \alpha}$.

APENDICE B - Transformación de la matriz de rigideces lateral de un sistema plano a las coordenadas del edificio.

En la fig 7 se muestra la ubicación del sistema plano j en la planta del nivel i del edificio.

Este sistema tiene solo un desplazamiento lateral d_{ji} en este nivel, cuya dirección positiva es la indicada por la flecha. También se muestra el centro de masas del nivel i y las direcciones positivas de los tres grados de libertad que tiene el edificio en tal nivel.

Considerando que el ángulo θ_i es pequeño, la relación entre d_{ji} y los desplazamientos del edificio se puede escribir como:

$$d_{ji} = |\cos \theta_j \sin \theta_j r_{ji}| \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{vmatrix} \quad \text{B.1}$$

donde θ_j es el ángulo entre la dirección positiva de u_i y la dirección positiva de d_{ji} ; r_{ji} es la distancia del sistema plano i al centro de masas en el nivel i , y para saber su signo, se supone que la dirección positiva de d_{ji} "gira" alrededor del centro de masas. Si este "giro" tiene el mismo sentido que θ_i , entonces r_{ji} es positivo; en caso contrario, negativo. En la fig 7, de acuerdo con estas convenciones, θ_j y r_{ji} son positivos.

La expresión B.1 se puede escribir en forma más compacta como:

$$d_{ji} = b_{ji} U_i \quad \text{B.2}$$

donde:

$$b_{ji} = |\cos \theta_j \sin \theta_j r_{ji}|$$

$$U_i = \begin{vmatrix} u_i \\ v_i \\ \theta_i \end{vmatrix}$$

si se considera los n niveles del edificio se tiene:

$$\underline{D}_j = \underline{B}_j \underline{U} \quad \text{B.3}$$

donde:

$$\underline{D}_j = \begin{vmatrix} d_{j1} \\ d_{j2} \\ \vdots \\ d_{jn} \end{vmatrix} \quad \underline{U} = \begin{vmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{vmatrix}$$

(n elementos) (3n elementos)

$$\underline{B}_j = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline \underline{b}_{j1} & & & \\ \hline & \underline{b}_{j2} & & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & \dots & \\ \hline & & & \underline{b}_{jn} \\ \hline \end{array}$$

(n por 3 n elementos, los no mostrados son ceros)

La expresión B.3 relaciona los desplazamientos de los pisos del edificio con los desplazamientos laterales del sistema plano j , y la matriz \underline{K}_j expresada en términos de las coordenadas del edificio es $\underline{K}_j^* = \underline{B}_j \underline{K}_j \underline{B}_j$

APENDICE C - Cálculo de desplazamiento en el análisis sísmico.

La matriz de rigideces lateral del edificio, particionada y descompuesta en el producto $\underline{S}^T \underline{S}$, donde \underline{S} es triangular superior, es:

$$\begin{vmatrix} \underline{K}_{LL} & \underline{K}_{L\theta} \\ \underline{K}_{L\theta}^T & \underline{K}_{\theta\theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{S}_{LL}^T & 0 \\ \underline{S}_{L\theta}^T & \underline{S}_{\theta\theta}^T \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \underline{S}_{LL} & \underline{S}_{L\theta} \\ 0 & \underline{S}_{\theta\theta} \end{vmatrix}$$

efectuando el producto del segundo miembro se deduce que:

$$\underline{K}_{LL} = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{LL}, \underline{K}_{L\theta} = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{L\theta} \text{ y } \underline{K}_{\theta\theta} = \underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{L\theta} + \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta} \quad \text{C.1}$$

El sistema del paso b.1 del procedimiento propuesto en la sección 4 es:

$$\underline{K}_{LL} \underline{\delta}_o = \underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{LL} \underline{\delta}_o = \underline{S}_{LL}^T \underline{Y} = \underline{F} \quad \text{C.2}$$

donde se ha definido el vector \underline{Y} por :

$$\underline{Y} = \underline{S}_{LL} \underline{\delta}_o \quad \text{C.3}$$

Los vectores \underline{Y} y $\underline{\delta}_o$ pueden calcularse fácilmente por ser \underline{S}_{LL}^T y \underline{S}_{LL} triangulares.

El vector \underline{M}_d del paso b.3 vale $\underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_o$, y usando las expresiones C.1 y C.3 se puede escribir:

$$\underline{M}_d = - \underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{LL} \underline{S}_{LL}^{-1} \underline{Y} = - \underline{S}_{L\theta}^T \underline{Y} \quad \text{C.4}$$

Por otro lado, los sistemas del paso b.7 son:

$$\underline{K}_{LL} \underline{\delta}_j + \underline{K}_{L\theta} \underline{\theta} = 0$$

$$\underline{K}_{L\theta}^T \underline{\delta}_j + \underline{K}_{\theta\theta} \underline{\theta}_j = \underline{M}_j, \quad j = 1, 2$$

de la primera de estas ecuaciones se tiene:

$$\underline{\delta}_j = - \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta} \underline{\theta}_j \quad \text{C.5}$$

y reemplazando este valor en la segunda ecuación queda:

$$(\underline{K}_{\theta\theta} - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta}) \underline{\theta}_j = \underline{K}_{\theta\theta}^* \underline{\theta}_j = \underline{M}_j \quad \text{CC.6}$$

Con $\underline{K}_{\theta\theta}^* = \underline{K}_{\theta\theta} - \underline{K}_{L\theta}^T \underline{K}_{LL}^{-1} \underline{K}_{L\theta}$. Usando las expresiones C.1 y simplificando se obtiene:

$$\underline{K}_{\theta\theta}^* = (\underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{L\theta} + \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta}) - (\underline{S}_{L\theta}^T \underline{S}_{LL}) (\underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{LL}^{-T}) (\underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{L\theta}) = \underline{S}_{\theta\theta}^T \underline{S}_{\theta\theta}$$

Esto muestra que ya se tiene la descomposición necesaria para resolver el sistema C.6 y conocer $\underline{\theta}_j$. Para encontrar $\underline{\delta}_j$ se usan las expresiones C.1 que permiten escribir C.5 en la forma:

$$\underline{\delta}_j = - (\underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{LL}^{-T}) (\underline{S}_{LL}^T \underline{S}_{L\theta}) \underline{\theta}_j = - \underline{S}_{LL}^{-1} \underline{S}_{L\theta} \underline{\theta}_j$$

premultiplicando la última igualdad por \underline{S}_{LL} queda:

$$\underline{S}_{LL} \underline{\delta}_j = - \underline{S}_{L\theta} \underline{\theta}_j \quad \text{C.7}$$

cuya solución es directa puesto que \underline{S}_{LL} es triangular superior y ya se conoce.

Nótese que para encontrar todos los desplazamientos y giros que requiere el análisis sísmico es necesario descomponer una sola vez la matriz \underline{K} en el producto de una matriz triangular superior por su transpuesta.

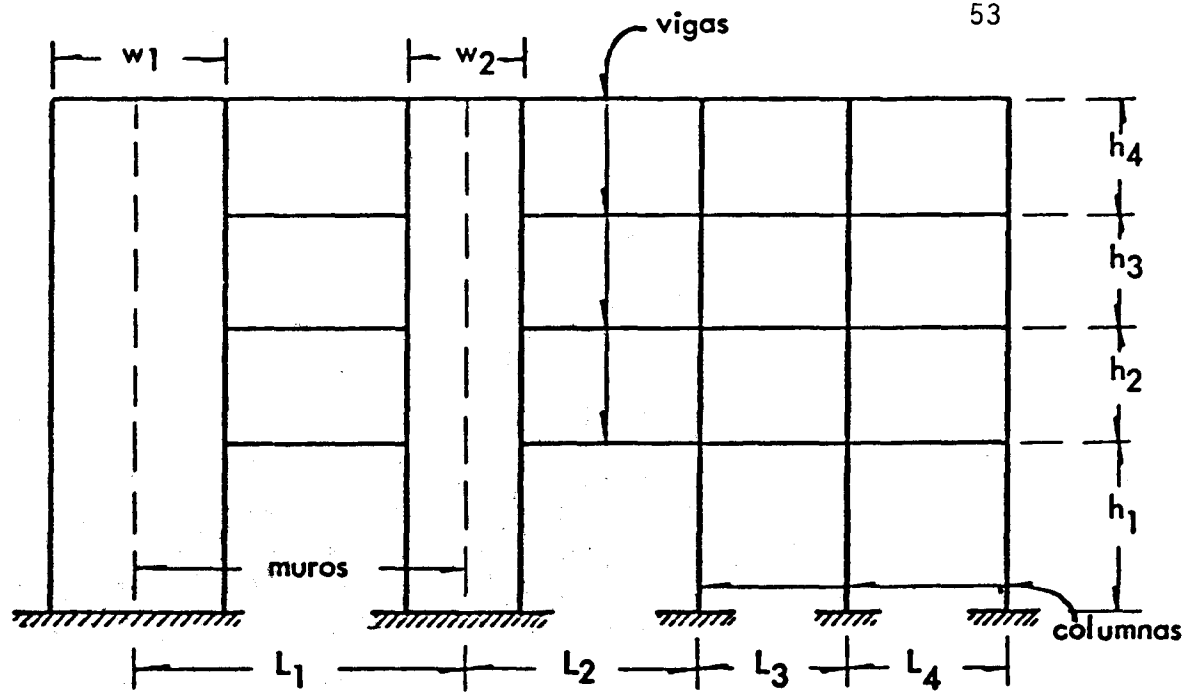


Fig 1. Sistema plano rectangular típico

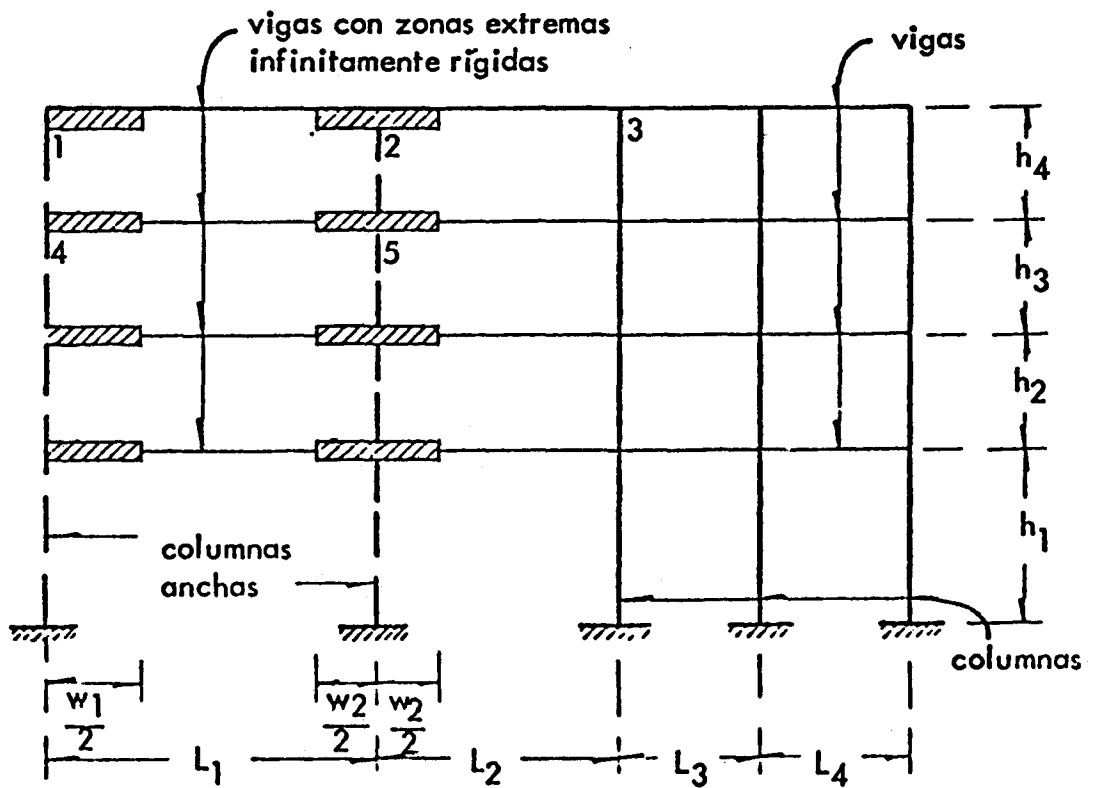
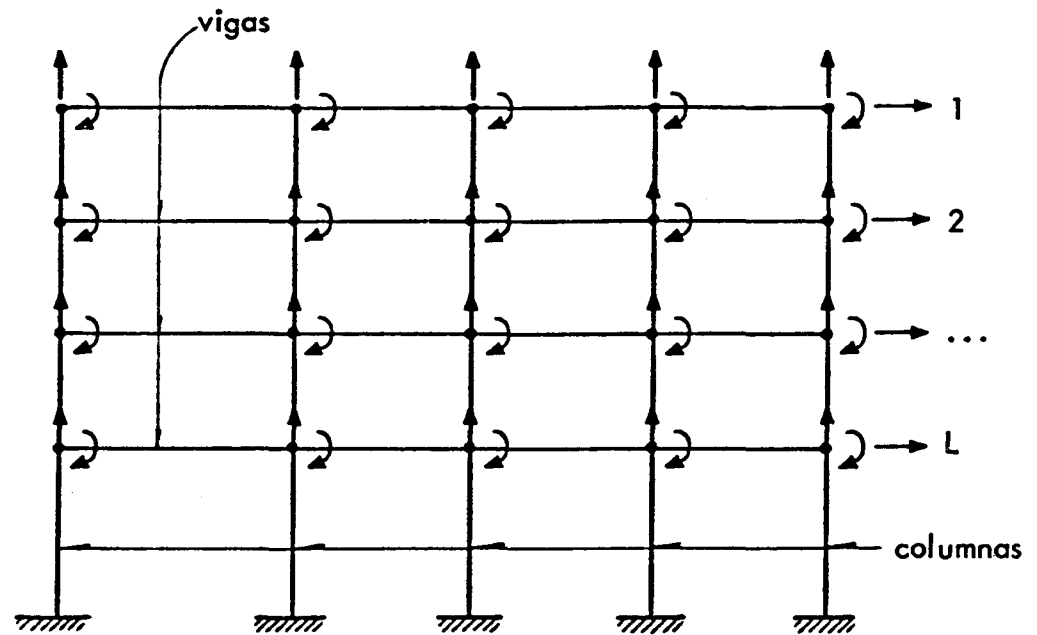


Fig 2. Idealización del sistema plano de la fig 1.



Nota: las columnas pueden ser anchas y las vigas pueden tener extremos infinitamente rígidos

Fig 3. Grados de libertad en un sistema plano idealizado, para emplear el método general

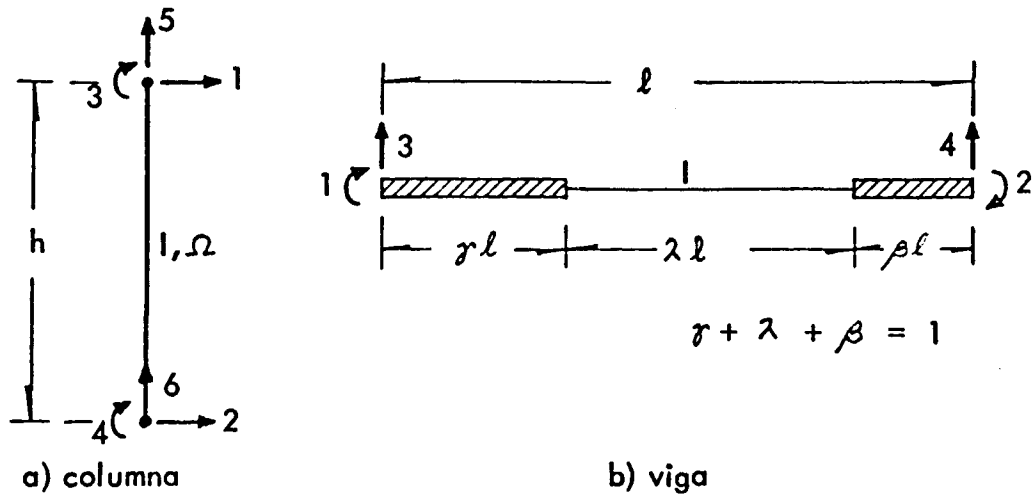
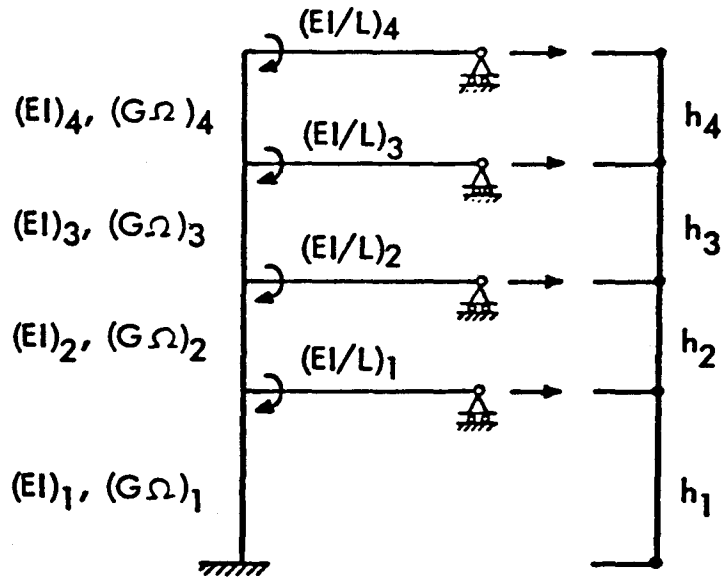
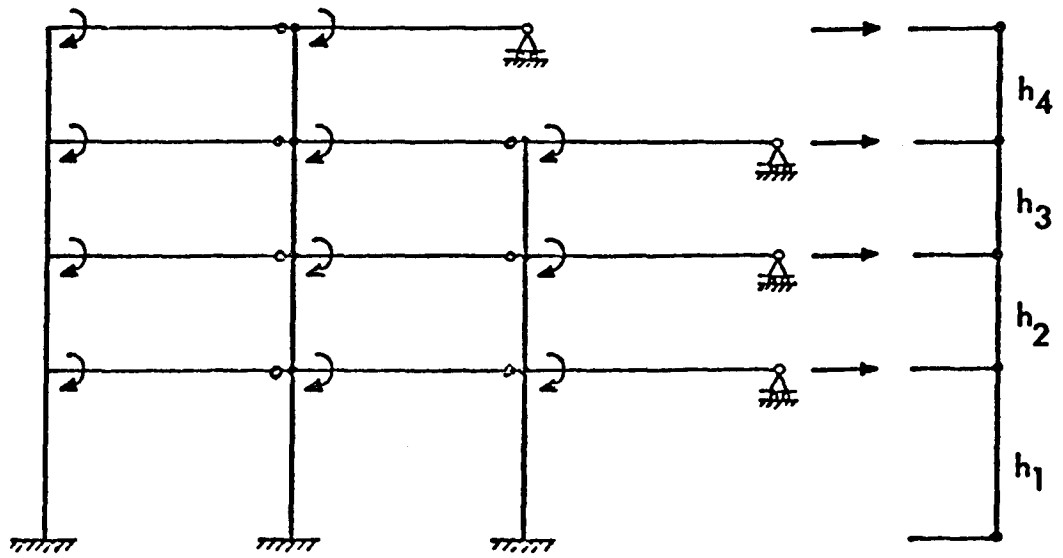


Fig 4. Grados de libertad de una columna y de una viga con extremos infinitamente rígidos



Nota: las flechas indican los grados de libertad

Fig 5. Componente básico del sistema equivalente



Nota: las flechas indican los grados de libertad

Fig 6. Acoplamiento de componentes básicos para formar un sistema equivalente

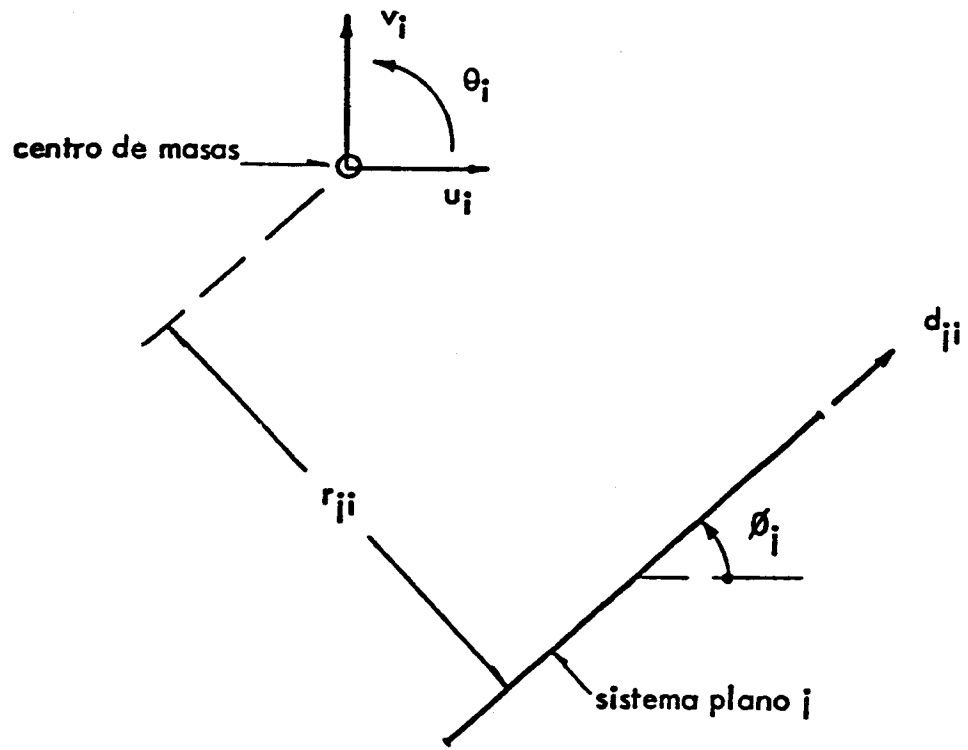
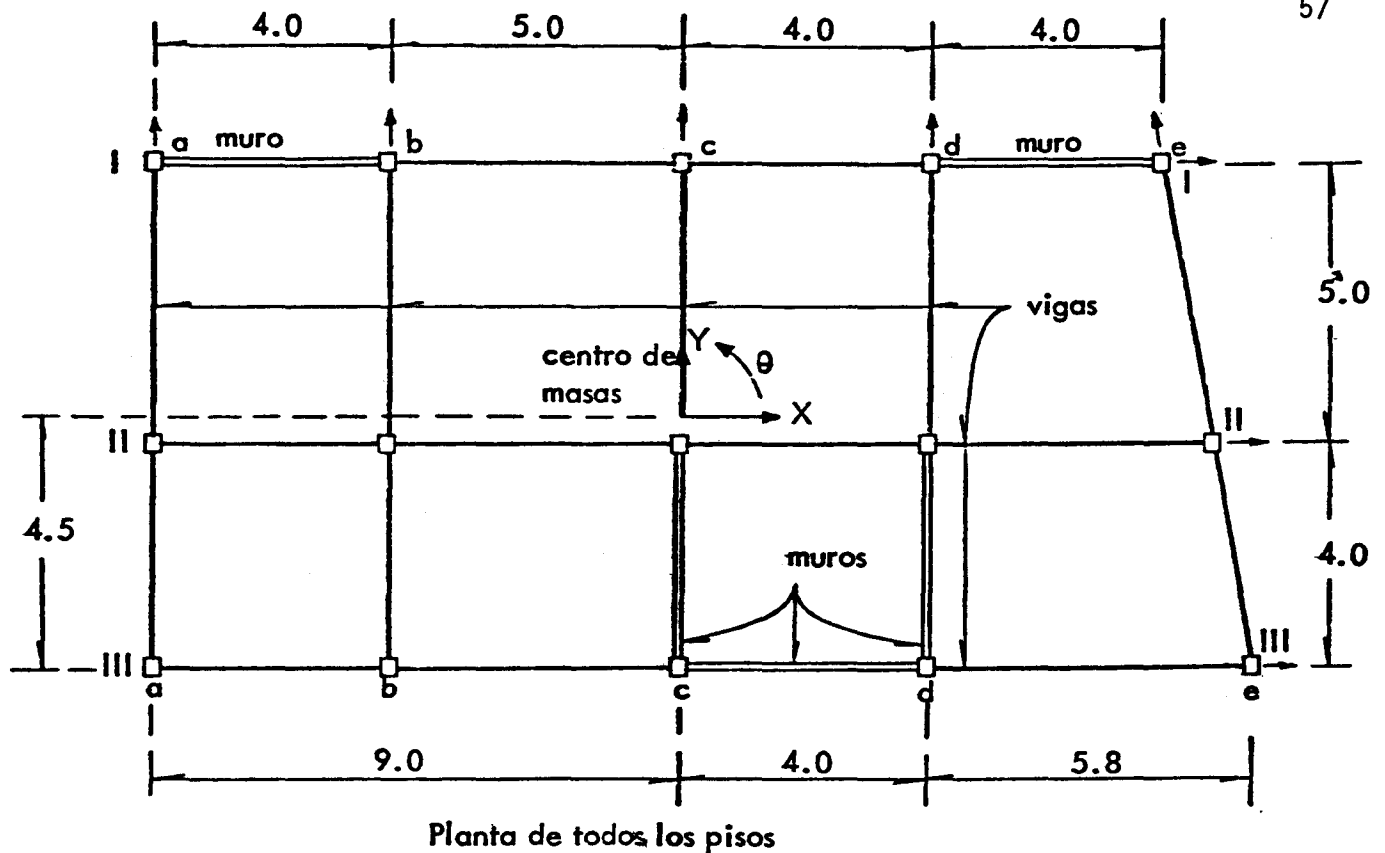


Fig 7. Grados de libertad del edificio y del sistema plano j , en el nivel i



Notas: espesor de los muros = 0.15 m
 módulo de elasticidad de todos los elementos = 2 000 000 ton/m²
 módulo de cortante de todos los elementos = 833 333 ton/m²
 momento de inercia de todas las vigas = 0.00255 m⁴
 las flechas indican los sentidos positivos de los desplazamientos laterales
 las distancias están en metros

Nivel	Columnas (m x m)	Altura (m)	Fuerzas (ton) y momentos (ton-m)			
			Por sismo en X		Por sismo en Y	
			F ^x	M ^x	F ^y	M ^y
1	.40 x .40	4.0	4.51	4.059	4.51	8.479
2	.40 x .40	3.0	7.89	7.101	7.89	14.833
3	.40 x .40	3.0	11.27	10.143	11.27	21.188
4	.30 x .30	3.0	14.65	13.185	14.65	27.542
5	.30 x .30	3.0	18.03	16.227	18.03	33.896
6	.30 x .30	3.0	21.41	19.269	21.41	40.251

Fig 8 . Planta, dimensiones, propiedades y cargas laterales para el ejemplo ilustrativo.