

ANALISIS SISMICO DE MUROS DE CONTENCION

Arturo Arias Suárez (I)

RESUMEN

Después de algunas consideraciones muy generales sobre el análisis de muros de contención sometidos a cargas estáticas, se hace una revisión somera del estado actual del conocimiento sobre el análisis sísmico de este tipo de estructuras. La parte principal del trabajo está dedicada a formular un modelo continuo del relleno y a desarrollar sus posibilidades de aplicación en el análisis dinámico. Se definen espectros de respuesta (espectros de Bessel) análogos a los que aparecen en el estudio de la presión hidrodinámica en presas bajo acción sísmica. Se aplica, en seguida, la teoría para formular un modelo del relleno con parámetros concentrados, que representa razonablemente bien el comportamiento del medio continuo postulado, y mediante el cual el análisis sísmico de muros de contención se puede efectuar empleando las técnicas usuales del análisis dinámico de estructuras con un número finito de grados de libertad.

1. CONSIDERACIONES SOBRE EL ANALISIS ESTATICO DE ESTRUCTURAS DE CONTENCION

En el cálculo de la presión de tierras sobre estructuras de contención, en condiciones estáticas, una de las consideraciones más importantes es la que se refiere a las restricciones cinemáticas que debe cumplir el campo de desplazamientos del relleno. Estas restricciones, cuya influencia sobre la intensidad y distribución de las presiones de tierra es determinante, están regidas, de una manera todavía no bien conocida, por la magnitud y forma de los desplazamientos y deformaciones que experimenta la estructura bajo la acción de las cargas. Las estructuras de la práctica ofrecen un rango tan amplio de variabilidad en lo que

(I) Instituto de Ingeniería, UNAM

concierno a su deformabilidad y capacidad de desplazamiento dentro de los límites que imponen las condiciones de servicio, que no se puede ir más allá de una caracterización esquemática de las situaciones posibles, considerando como guía los casos extremos que pueden presentarse.

En un extremo están aquellas estructuras que por su rigidez y forma de sujeción experimentan deformaciones y desplazamientos muy pequeños bajo la acción de cargas estáticas. Es el caso, por ejemplo, de las paredes de sótanos, restringidas por las losas de piso, o de los muros frontales de estribos de puente, cuya deformación está coartada por las alas y, en su extremo superior, por la estructura del tablero. En el otro extremo se encuentran las estructuras que pueden experimentar desplazamientos y deformaciones relativamente grandes sin que ello afecte a su seguridad y función, como es el caso de muros de contención en voladizo que pueden deformarse, desplazarse y girar en la base apreciablemente antes de la falla.

Si los desplazamientos del relleno son nulos, la presión de tierras es igual a la presión en reposo p_0 :

$$p_0 = K_0 \gamma z \quad (1.1)$$

donde γ es el peso volumétrico del relleno, z la profundidad bajo la superficie del relleno (que se supondrá horizontal) y K_0 el coeficiente de empuje en reposo. Si el relleno está cargado en toda su superficie por una carga normal uniforme y flexible, de intensidad q ,

$$p_0 = K_0 (\gamma z + q) \quad (1.2)$$

En ambos casos la distribución de presiones es lineal en z .

Si hay, además, otras cargas aplicadas en la superficie del relleno, las presiones correspondientes se pueden estimar razonablemente empleando la teoría clásica de la elasticidad. Las soluciones disponibles para estos problemas son relativamente simples sólo cuando la pared es perfecta-

mente lisa.

Según Jáky (1), el valor de K_0 se puede estimar con buena precisión en el caso de suelos normalmente consolidados mediante la fórmula

$$K_0 = 1 - \text{sen } \phi \quad (1.3)$$

donde ϕ designa el ángulo de rozamiento del relleno en términos de esfuerzos efectivos. Esta expresión ajusta bien con la mayor parte de los datos experimentales. Si se admite que el relleno se comporta como un sólido elástico, homogéneo e isótropo, con deformaciones horizontales nu las, la teoría clásica de la elasticidad conduce a la expresión

$$K_0 = \frac{\nu}{1 - \nu} \quad (1.4)$$

donde ν es el coeficiente de Poisson del material.

Para suelos sobreconsolidados o compactados, K_0 es mayor que el obtenido de las ecuaciones 1.3-4 y está afectado por la secuencia de las operaciones de construcción. En suelos expansivos se pueden presentar valores especialmente altos de K_0 . Kézdi (2) y Wu(3) dan tablas de valores empíricos de K_0 para diversos tipos de suelos, a base de las cuales se ha preparado la tabla 1. Para valores de ν aplicables a diversos suelos véase (4), p. 116.

Para precisar la naturaleza de la otra situación extrema, considérese un medio continuo seminfinito de superficie horizontal formado por un material que obedece al criterio de falla de Mohr-Coulomb y está sollicitado por el campo de fuerzas de la gravedad. Se supondrá que inicialmente los esfuerzos son los que corresponden al estado en reposo descrito anteriormente. Si el medio experimenta una dilatación homogénea en una dirección horizontal, la presión vertical permanecerá fija mientras que la presión sobre los planos verticales perpendiculares a la dirección de la dilatación disminuirá, a medida que se va movilizand

cia de cortante, en toda la masa, hasta que se alcanza un estado límite de falla (o de equilibrio plástico). En esta situación final, llamada estado activo de Rankine (5), la condición de Mohr-Coulomb se satisface en todo punto del medio y se puede determinar el estado de esfuerzos correspondiente sin conocer los desplazamientos y deformaciones, los cuales quedan indeterminados. La presión sobre un plano vertical perpendicular a la dirección de la dilatación es una función lineal de z :

$$p_A = K_A \gamma z - 2c\sqrt{K_A} \quad (1.5)$$

donde K_A es el coeficiente de empuje activo dado por

$$K_A = \frac{1 - \operatorname{sen} \phi}{1 + \operatorname{sen} \phi} \quad (1.6)$$

y c es la cohesión del material.

Si, en lugar de una dilatación, el sólido experimenta una compresión homogénea en una dirección horizontal, aumenta la presión en los planos verticales perpendiculares a la dirección de la compresión hasta que de nuevo se alcanza un estado de equilibrio plástico. Esto ocurre simultáneamente en toda la masa. Para esta situación límite (estado pasivo de Rankine) se satisface de nuevo la condición de Mohr-Coulomb, los esfuerzos son determinables, pero no así los desplazamientos y deformaciones. La presión sobre los planos verticales perpendiculares a la dirección de la compresión es

$$p_p = K_p \gamma z + 2c\sqrt{K_p} \quad (1.7)$$

donde

$$K_p = \frac{1}{K_A} = \frac{1 + \operatorname{sen} \phi}{1 - \operatorname{sen} \phi} \quad (1.8)$$

es el coeficiente de empuje pasivo. De nuevo la distribución de presiones es lineal en z .

En ambos casos las superficies de falla son planos perpendiculares al plano definido por la vertical y la dirección horizontal de la dilatación o compresión, y forman con la vertical ángulos iguales a $45^\circ - \frac{\phi}{2}$, en el caso activo, y a $45^\circ + \frac{\phi}{2}$, en el caso pasivo.

Supóngase ahora que en el medio seminfinito se intercala una pared lisa vertical, finita o no, deformable o no deformable, de plano perpendicular a la dirección de la dilatación o compresión y que puede desplazarse libremente en esa dirección junto con el medio. Es obvio, por simple simetría, que el campo de esfuerzos descrito por aquellas de las ecuaciones 1.5.-8 que sean aplicables, según se trate de dilatación o compresión, no se altera por la presencia de la pared. Esta situación describe el otro caso extremo a que se aludió anteriormente. Las estructuras de contención del mundo real no satisfacen estas condiciones ideales, ya sea porque no son lisas o porque no están libres de desplazarse junto con el medio. Las presiones que actúan sobre ellas no serán entonces lineales en z , ni independientes del monto de las deformaciones y desplazamientos, como tampoco serán planas las superficies de falla, ni la situación de equilibrio límite se producirá simultáneamente en toda la masa.

No es cuestión de entrar aquí a detallar cómo resuelve estos problemas la mecánica de suelos, pero sí conviene decir algunas palabras sobre los desplazamientos necesarios para que se produzcan, aunque sea aproximadamente, los estados activo y pasivo en un volumen significativo de la masa del relleno. Que se necesitan desplazamientos superiores a unos ciertos mínimos para desarrollar en el relleno los estados activo o pasivo es un hecho conocido desde hace unos cincuenta años (6,7); sin embargo, la determinación de la presión de tierra para desplazamientos inferiores a esos mínimos es un problema que no ha sido completamente resuelto todavía. En la tabla 2 se dan estimaciones, basadas en evidencia experimental, de los desplazamientos necesarios para que tenga lugar el desarrollo de los estados límite mencionados. Conviene advertir que para suelos cohesivos los valores de dicha tabla no tienen el mismo grado de

apoyo experimental que para suelos no cohesivos. Conviene señalar también que, en el caso de empuje pasivo y cuando el movimiento tiene componente vertical, los desplazamientos necesarios pueden ser aun mayores que los anotados en la tabla. Una dificultad importante para fijar valores mínimos en el caso pasivo es que la falla se produce gradual y progresivamente y no para un desplazamiento bien definido. Para más detalles sobre la evidencia experimental se pueden consultar los trabajos de Rowe y Peaker (8), de Roscoe (9) y de James y Bransby (10).

La magnitud del desplazamiento mínimo del extremo superior de un muro de contención para el cual se produce el estado límite de falla del relleno es mucho mayor para el caso pasivo que para el activo. Según los datos de tabla 2, para suelos no cohesivos la relación es de 50:1 en el caso de traslación perpendicular al plano de la pared y de 100:1 para rotación en torno de la base. En las experiencias de Rowe y Peaker (8) y en las de James y Bransby (10), los desplazamientos necesarios para producir la falla pasiva generalizada en arena resultan mayores que aquellos que es razonable aceptar para una estructura en servicio.

Llama la atención que según la tabla 2, la relación Δ/H entre el desplazamiento Δ necesario para producir el estado límite de que se trate y la altura H de la pared resulte independiente de H , y que, dentro de cada tipo de suelo y forma de desplazamiento, la relación mencionada no dependa de las propiedades mecánicas del relleno. Se trata sin duda de una excesiva simplificación del problema.

En el caso de empuje activo, los desplazamientos necesarios para que dicho estado ocurra son suficientemente pequeños como para aceptar que los esfuerzos en las etapas de deformación del relleno previas a la falla generalizada están relacionados con las propiedades del medio referentes a su deformabilidad. Si se supone que las variables significativas del problema son H , γ , c , ϕ , y las constantes elásticas G y ν (G = módulo de rigidez transversal), el análisis dimensional conduce a la conclusión que Δ/H es de la forma

$$\frac{\Delta}{H} = F \left(\frac{\gamma H}{G}, \frac{c}{H}, \phi, \nu \right) \quad (1.9)$$

Si, además, se admite que ϕ , c , ν y G son independientes de la deformación y que las relaciones entre esfuerzos y deformaciones son lineales, la ec 1.9 se reduce a

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{\gamma H}{G} F \left(\frac{c}{\gamma H}, \phi, \nu \right) \quad (1.10)$$

que en el caso de relleno no cohesivo ($c = 0$) toma la forma más simple

$$\frac{\Delta}{H} = \frac{\gamma H}{G} F (\phi, \nu) \quad (1.11)$$

Haciendo uso de las hipótesis recién enunciadas y aceptando la aplicabilidad de la teoría elástica clásica (sólido de Hooke, homogéneo e isótropo) se puede establecer (11) que el estado de falla activa comienza a producirse en ciertos puntos del relleno para un desplazamiento $(\Delta_A)_i$ dado por

$$\frac{(\Delta_A)_i}{H} = \frac{\pi}{8} (1 - \nu) (K_0 - K_A) \frac{\gamma H}{G} \quad (1.12)$$

y que dicho estado compromete un volumen significativo de la masa de suelo para un desplazamiento lateral $(\Delta_A)_f$ tal que

$$(\Delta_A)_f = \frac{27}{16} (\Delta_A)_i \quad (1.13)$$

Estos resultados han sido deducidos para una pared vertical perfectamente lisa, relleno no cohesivo de superficie horizontal y movimiento de traslación pura en dirección perpendicular a la pared.

A pesar de las simplificaciones que ha sido necesario aceptar en la deducción, estas fórmulas proporcionan resultados razonables. Por ejemplo, considérese un relleno no cohesivo de las siguientes características:

$$\gamma = 1.55 \text{ ton/m}^3, \phi = 35^\circ, \nu = 0.3, G = 500 \text{ ton/m}^2$$

Con estos datos se obtiene

$$\frac{(\Delta_A)_f}{H} = 2.23 \times 10^{-4} H$$

donde H y $(\Delta_A)_f$ están expresados en metros. El resultado coincide con el de tabla 2 ($\Delta/H = 0.001$) para $H = 4.5$ m, y es respectivamente mayor o menor que el de la tabla según que H sea superior o inferior a 4.5 m.

En el presente trabajo se tomará como criterio para decidir que un problema es de desplazamientos pequeños la condición

$$\Delta < (\Delta_A)_i \quad (1.14)$$

donde Δ es el desplazamiento lateral máximo de la estructura de contención y $(\Delta_A)_i$ es el desplazamiento definido por la ec 1.12.

La determinación de las presiones sobre estructuras de retención que experimentan desplazamientos pequeños ha recibido alguna atención en los últimos años, pero la actividad desarrollada en conexión con este tipo de problema no es ni con mucho comparable al esfuerzo que se ha destinado al estudio de los estados de falla, sobre el cual se ha concentrado una buena parte de la investigación teórica y experimental de la mecánica de suelos. El problema central, aun no resuelto satisfactoriamente, es el de formular relaciones constitutivas confiables, válidas para los suelos en el rango de las deformaciones pequeñas, o, por lo menos, establecer relaciones carga-deformación que se puedan usar con alguna confianza.

Se puede afirmar, sin distorsionar gravemente los hechos históricos, que el análisis científico del empuje de tierras comienza con Coulomb

(12). El libro de Heyman (13) contiene excelentes referencias sobre los precursores de Coulomb y el desarrollo ulterior de la teoría hasta su forma moderna, con observaciones críticas de gran interés. Coulomb postula que los suelos pueden representarse como un medio continuo caracterizado por dos parámetros $c - \phi$ y por un criterio de falla que hoy conocemos con el nombre de criterio de Mohr-Coulomb, pero, curiosamente, nunca llega a establecer las ecuaciones generales del equilibrio de un medio continuo, a pesar de que en varios puntos de su Essai (12), uno pensaría que está a punto de hacerlo. Este paso es dado por Cauchy en 1823 (14). Las ecuaciones diferenciales del equilibrio y las condiciones de frontera para un medio $c - \phi$ son formuladas por primera vez por Lévy (15) en 1869 ; a él se deben también la aplicación al problema de la función de esfuerzos introducida por Airy en 1862 (16) y una discusión completa del caso en que hay roce entre la pared y el suelo. Lévy hace notar que si se fija a priori el valor del coeficiente de roce entre suelo y pared, dicho valor será, salvo casualidad, incompatible con la distribución de esfuerzos en el suelo resultante del análisis como material de Coulomb y concluye que las superficies características no serán en general planas, aunque el estado en que se encontraba la teoría en esa época no le permitió determinarlas. La posibilidad de que la superficie de ruptura fuera curva ya había sido considerada por Coulomb (artículo XV de ref 12), quien señala, además, el método a seguir para determinarla, aunque sus cálculos finales los realiza para el caso de una superficie plana. Saint-Venant fue el encargado de reportar a la Académie el trabajo de Lévy; sus comentarios están seguidos de un breve trabajo de Saint-Venant mismo (17) en el cual señala que la ecuación diferencial que es preciso resolver es de segundo orden y no lineal (de segundo grado) y que, por tanto, no hay esperanza de obtener una solución general exacta. La verdad es que sí se puede obtener tal solución, al menos para parte del campo de esfuerzos, en el caso que la superficie del suelo es plana, horizontal o inclinada, y esa es precisamente la solución obtenida por Lévy. Boussinesq (18,19) es quien por primera vez enuncia explícitamente que se está suponiendo que toda la masa del suelo contenida dentro de cierta región se encuentra en un estado límite de equilibrio y se

percata de la existencia de superficies de discontinuidad en el campo de esfuerzos. Recién en 1934, Caquot (20, 21) obtiene soluciones completas del problema de Lévy y Saint-Venant. El término final del desarrollo de esta teoría (material de Coulomb) está marcado por los trabajos de Sokolowskii (22, 23). Una excelente exposición sobre los desarrollos más modernos, examinados desde el punto de vista de la teoría de la plasticidad es la de Salençon (24); la claridad del enfoque y las numerosas referencias bibliográficas que contiene le otorgan a esta obra un valor inapreciable.

Desde que Terzaghi introdujo la idea del suelo como un material formado por dos fases, ha resultado obvio que los materiales de una fase, como el de Coulomb, el de Tresca o el de von Mises, constituyen modelos que resultan pobres en muchos problemas de mecánica de suelos. Sería muy largo entrar a describir los diversos modelos propuestos, tanto de una fase como de dos fases, discutir sus relativas bondades y defectos y señalar los límites de aplicabilidad en mecánica de suelos. Un resumen adecuado, pero pobre desde el punto de vista crítico, se puede encontrar en (25), especialmente en los capítulos 2 y 3, donde se hallará también una bibliografía razonablemente completa hasta 1975.

La actual proliferación de modelos se debe en gran parte a la disponibilidad de computadoras electrónicas de gran capacidad que salvan las dificultades analíticas mediante la fuerza brutal de la tecnología avanzada, que a veces es mera fuerza bruta. Esa disponibilidad ha permitido resolver casos relativamente complicados que de no ser por ello no se soñaría en atacar. Paralelamente, las posibilidades que ofrecen las computadoras están llevando a una apreciación más sobria y realista de las limitaciones involucradas. El artículo de Clough y Tsui (26) da un buen resumen de las aplicaciones al análisis estático de estructuras de contención realizadas hasta 1975.

Los nuevos métodos se orientan al problema de predecir no solamente las presiones de tierra sino también el estado de deformación de la es-

estructura y del suelo. Los resultados obtenidos son alentadores y, a veces, satisfactorios. Pero cabe aquí decir algunas palabras de advertencia a los excesivamente optimistas. Los autores recién nombrados citando resultados de (28) exhiben como satisfactorio haber obtenido teóricamente desplazamientos laterales máximos de un tablestacado, del orden de seis veces los desplazamientos máximos medidos. Ellos dicen erróneamente que los desplazamientos medidos fueron del orden de la mitad de los calculados. Repitiendo el cálculo con valores de los parámetros del suelo corregidos a la luz de los resultados observados en la estructura real, los autores de (28) obtienen nuevas estimaciones de los desplazamientos máximos del orden del doble de los medidos. Las distribuciones de los desplazamientos calculados y medidos, aún después de esta corrección, difieren notoriamente (Véase fig 15.8 de ref (26)), de donde resulta que los momentos de flexión predichos por la teoría deben estar afectados por errores enormes.

En otro de los ejemplos de la referencia citada (26) se intenta reproducir por el cálculo los resultados experimentales de James y Bransby (10). Los experimentos fueron efectuados sobre rellenos de arena seca con superficie horizontal libre de cargas, sostenidos por una pared plana, rugosa, inicialmente vertical, que se hacía girar en torno de su base y en contra del relleno, con el propósito de provocar el estado pasivo. Los autores del trabajo experimental tomaron precauciones para que el estado de deformación fuera plano y que la influencia del roce en las paredes laterales del modelo fuera despreciable. La comparación con los resultados del cálculo se refiere a una de las series experimentales, correspondiente a una arena suelta (serie PH de ref (10)) con una relación de vacíos inicial $e_0 = 0.77$, y un peso volumétrico inicial $\gamma_0 = 1.50$ ton/m³ (ref (10)), Tabla 1). Para esta arena, James y Bransby dan $\phi = 35^\circ$ (erróneamente, los autores de (26) anotan el valor de $\phi = 49^\circ$, que corresponde a las series experimentales con arena densa: serie PE de ref (10)).

La concordancia entre las presiones calculadas y las observadas es

tolerable desde un punto de vista cualitativo; pero según los mismos autores de (26), no se obtuvo concordancia cuantitativa y lo atribuyen a que los efectos de escala del modelo experimental fueron significativos (para lo cual no tienen prueba) y al valor anómalo de ϕ (en lo cual están equivocados, como ya se señaló).

En la Tabla 3 se ha hecho una comparación de los empujes y momentos de volteo obtenidos por cálculo (26) con los valores experimentales (10). Se puede apreciar que la teoría empleada en (26) da resultados medianamente aceptables para giros pequeños, pero yerra inaceptablemente por defecto para giros mayores de 3° . Las discrepancias son mayores en el momento de volteo que en los empujes. Se observará, además, que según los datos experimentales, el punto de aplicación de la resultante de las presiones sube al aumentar el ángulo de giro (para arena suelta), mientras que el cálculo no predice prácticamente ninguna variación en la posición de la resultante. Las experiencias de ref (10) muestran que el movimiento del punto de aplicación del empuje total varía en forma inversa en el caso de arena densa; es decir, baja al aumentar el giro de la pared.

2. ESTADO ACTUAL DEL ANALISIS SISMICO DE ESTRUCTURAS DE CONTENCION

El cálculo de presiones de tierra sobre muros de contención en condiciones sísmicas es un tema que no ha alcanzado todavía un grado de desarrollo semejante al del correspondiente problema estático. Ya se ha señalado anteriormente que nuestro conocimiento sobre las relaciones constitutivas de los suelos es imperfecto, aun bajo condiciones estáticas. En el caso de cargas y deformaciones que varían lenta y monótonamente, el estado actual de la teoría se puede considerar satisfactorio; no así cuando se trata de cargas y deformaciones oscilantes, alternantes o rápidamente variables. Esta es casi con certeza la razón por la cual en las aplicaciones prácticas se emplean métodos de cálculo muy simplificados.

Método de Mononobe-Okabe. En 1924, Mononobe (29) propuso un método

para estimar la presión de tierras bajo acción sísmica. Dicho método, que no es más que una modificación trivial de la teoría debida a Coulomb, fué desarrollado, en seguida, por Okabe (30) y por Mononobe y Matsuo (31). Las hipótesis básicas del método son las siguientes:

- (1) El muro se desplaza lateralmente lo suficiente para producir en el relleno un estado de equilibrio plástico.
- (2) El relleno cumple con el criterio de falla de Mohr-Coulomb.
- (3) La falla del relleno ocurre en un plano inclinado que pasa por el pie del muro.
- (4) La cuña de suelo comprendida entre el plano de falla, la pared y la superficie libre se comporta como un cuerpo rígido sometido a un campo de fuerzas constante cuyas componentes por unidad de peso son k_h , según la horizontal, y k_v , según la vertical.
- (5) La cuña de suelo se encuentra en equilibrio bajo la acción de su propio peso, las fuerzas de cuerpo recién descritas y las fuerzas de superficie que actúan en el plano de falla y en el contacto con la pared.

Aplicando estas hipótesis y las condiciones de equilibrio de fuerzas y momentos se puede calcular el empuje total sobre el muro (debido a la gravedad y al campo estático que representa a la acción sísmica, conjuntamente). El análisis se puede hacer tanto para el caso activo como el pasivo, según sea el sentido en que se desplaza la pared.

Aún en el caso de relleno no cohesivo las fórmulas que resultan son relativamente complicadas y es preferible recurrir, en las aplicaciones prácticas, a gráficas o tablas (32). El método se puede extender al caso de rellenos cohesivos, agregando las fuerzas cohesivas que se desarrollan en la superficie de falla y en el contacto con el muro. Se pueden aplicar también los métodos gráficos desarrollados por diversos autores para el análisis bajo condiciones estáticas; ello requiere redefinir el campo de la gravedad y modificar la geometría del problema (32, pp 29-30). Este artificio permite tratar casos más complicados, como

son aquellos en que la espalda del muro es quebrada o la superficie del relleno es irregular.

Sólo unos pocos países tienen reglamentos de construcción que incorporen disposiciones para el diseño sísmico de muros de contención; en general, cuando dichas disposiciones existen están basadas en el método de Mononobe-Okabe (33). Según parece, el método es empleado incluso en países cuyos reglamentos no lo prescriben.

En las primeras versiones del método se suponía que el empuje total actuaba a la altura $H/3$ sobre la base. En vista de los resultados de pruebas en modelos y de algunos refinamientos teóricos del método, Seed y Whitman (34) han recomendado que el incremento de empuje debido a la acción sísmica, por encima del estático, se aplique a la altura $0.6H$ contada desde la base.

Conviene discutir algunas de las limitaciones del método.

1). Los desplazamientos necesarios para que se desarrolle completamente un estado plástico en el relleno pueden ser relativamente grandes, en el caso activo, y mayores que los desplazamientos admisibles por razones de seguridad y de servicio, en el caso pasivo. Esto limita la aplicabilidad del método al cálculo de presiones dinámicas adicionales por encima de la presión activa sobre estructuras que por su deformabilidad y forma de sujeción admiten desplazamientos relativamente grandes (mayores que los desplazamientos $(\Delta_A)_f$ de ec. 1.13 o mayores que los de Tabla 2, según cual de estos dos criterios se adopte).

2). Aunque la suposición de una superficie plana de falla parece razonable a primera vista, su validez se basa en un número relativamente pequeño de pruebas en modelos y observaciones de campo. Se pueden desarrollar soluciones plásticas que no requieran de esta hipótesis, co-

mo las de refs (35-37) basadas en el método de Sokolovskii(22-23) o en la hipótesis de que la superficie de falla tiene por directriz una espiral logarítmica.

Nandakumaran (38) ofrece una detallada reseña de los trabajos desarrollados por investigadores hindúes. Todos plantean variantes del método de Mononobe-Okabe, adaptando la teoría de Coulomb (39-40) o modificaciones de la misma (41-42), y consideran campos estáticos de fuerzas que suponen equivalentes a los efectos dinámicos. Reconocen que la distribución de presiones sobre la pared no es hidrostática y que la resultante se localiza por encima de la mitad de la altura de la pared.

Ninguna de estas modificaciones del método de Mononobe-Okabe supera las deficiencias fundamentales del original.

3) Aun con los refinamientos señalados en el punto anterior, el método sigue siendo un método estático, en el cual los efectos dinámicos son sustituidos por un campo ficticio de fuerzas de cuerpo, independiente del tiempo, cuya evaluación requiere de la selección adecuada de los coeficientes sísmicos k_h y k_v . En general, esos coeficientes se eligen significativamente menores que las aceleraciones máximas que son de esperar en un movimiento sísmico que se pueda considerar adecuado como excitación de diseño; aparentemente se procede así basándose en la esperanza de que se puede tolerar algún corrimiento lateral de la estructura, aunque hasta hace poco no se daba ninguna justificación cuantitativa para tal reducción.

4) Es obvio por lo dicho en el punto anterior, que el método no tiene en cuenta los efectos de resonancia o de reflexión y refracción de ondas, ni los de disipación de energía por roce interno o radiación.

Wood (43) y, anteriormente, Newmark y Rosenblueth (44) han sugerido que el método empleado por Newmark (45) para estudiar la estabilidad de terraplenes sometidos a temblor podría adaptarse al análisis de las estructuras de retención. El método de Newmark permite evaluar los desplaza-

mientos acumulados por deslizamientos debidos a fuerzas de inercia que exceden la resistencia del suelo, empleando un modelo rígido-plástico. Si se aplica este enfoque, el diseño se podría basar en la selección de un límite aceptable para el desplazamiento lateral permanente de la pared, en lugar de los coeficientes sísmicos k_h y k_v . La sugerencia ha sido seguida por Richards y Elms (46) y se discute con algún detalle a continuación.

Método basado en limitar desplazamientos. El procedimiento desarrollado por Richards y Elms (46) es aplicable a muros de contención masivos para los cuales se pueda admitir un cierto desplazamiento lateral máximo. Utiliza un modelo rígido-plástico no simétrico para representar el sistema muro-suelo, similar al modelo de falla progresiva introducido por Newmark (45) para describir el comportamiento sísmico de terraplenes. Newmark (45) y posteriormente Franklin y Chang (47) calcularon los desplazamientos acumulados de dichos modelos excitados por los acelerogramas de varios temblores y de pulsos elementales de aceleración. Para comparar los resultados, escalaron los registros a una aceleración máxima y una velocidad máxima del terreno de 0.5 g y 76.2 cm/seg (30 in/sec), respectivamente, y obtuvieron así gráficas del desplazamiento acumulado al término de la excitación, normalizado a los niveles máximos de aceleración y velocidad recién anotados. Estos desplazamientos finales normalizados se pueden graficar como función de la resistencia al deslizamiento normalizada, N/A , donde A es la aceleración máxima expresada como fracción de la gravedad. Se han propuesto varias ecuaciones empíricas para representar los resultados; una de ellas es la de Richards y Elms (46), basada en los resultados de Franklin y Chang (47),

$$\Delta = 0.087 \frac{V^2}{Ag} \left(\frac{N}{A} \right)^{-4} \quad (2.1)$$

donde

Δ = desplazamiento relativo del bloque elastoplástico al término de la excitación (desplazamiento permanente)

- V = velocidad máxima de la excitación
A = aceleración máxima de la excitación expresada como fracción de la aceleración de la gravedad
N = coeficiente adimensional determinado de tal forma que para una aceleración Ng se produce la situación de equilibrio límite del bloque elastoplástico.
g = aceleración de la gravedad

La ecuación 2.1 es dimensionalmente homogénea y, por tanto, se puede emplear con cualquier sistema racional de unidades. El ajuste de la ec 2.1 fue hecho de manera que representara aproximadamente la cota superior de los resultados y es válida para valores de N/A comprendidos entre 0.3 y 0.8.

Si se eligen valores para Δ , A y V, la ec 2.1 permite determinar N. Usando para k_h el valor de N así calculado, la teoría de Mononobe-Okabe, o una de sus modificaciones, permite calcular el empuje sobre el muro y determinar su peso. En el análisis deben incluirse las fuerzas de inercia sobre el muro mismo.

La aplicación de este método al diseño de muros de gravedad ha sido discutida con cierto detalle por Whitman (48). Allí se describen, además, algunos refinamientos para tener en cuenta la componente vertical de la aceleración y el caso en que el muro puede inclinarse.

El mérito del procedimiento de Richards y Elms es el de dar un criterio razonable para estimar k_h . Pero le son aplicables las mismas críticas fundamentales que al de Mononobe-Okabe y sus modificaciones. Conviene observar que el procedimiento de Richards y Elms no determina las presiones sobre la pared sino indirectamente, recurriendo a la solución de Mononobe-Okabe. Se pueden hacer, además, las siguientes observaciones.

1) La operación de escalar los acelerogramas a niveles de aceleración y de velocidad máximas del terreno fijados de antemano no es posi-

ble con un acelerograma dado, si no es distorsionando el contenido de frecuencias, porque las dos escalas no se pueden satisfacer simultáneamente, salvo por casualidad.

2) Es sabido que aun para una misma localidad, temblores de diferente intensidad tienen distribuciones de energía diferentes en el dominio de la frecuencia.

3) El sistema de bloque elastoplástico no simétrico es francamente no lineal y, por lo tanto, las envolventes de los desplazamientos permanentes serán diferentes para distintos factores de escalamiento de las aceleraciones y velocidades. Piénsese solamente en lo que ocurre si se eligen escalas para las cuales no se excede la resistencia al deslizamiento: la envolvente tendrá todas sus ordenadas nulas y, sin embargo, la experiencia muestra que en tal caso puede haber presiones importantes sobre el muro (49), que tratándose de un muro de gravedad con toda seguridad no interesan, pero sí son importantes para otros tipos de estructura de contención.

Recientemente, Byrne y Salgado (50) han empleado un modelo, similar al de Newmark, que tiene la ventaja de determinar directamente la fuerza resultante sobre la pared, sin necesidad de recurrir a la hipótesis de igualar N con el coeficiente k_h de la teoría de Mononobe-Okabe. Conviene hacer notar que sus resultados para el caso de los acelerogramas registrados en la Alameda Central de ciudad de México son poco realistas, por que los escalan de manera que la aceleración máxima sea 0.27 g, ¡seis veces las aceleraciones máximas registradas en los temblores de mayo de 1962!

Modelos elásticos. En estos modelos se supone que el suelo se puede representar como un continuo elástico lineal. Los primeros trabajos que emplean este tipo de modelo parecen ser los de Matsuo y Ohara (51) y de Ishii et al. (52) que hicieron formulaciones parecidas empleando las ecuaciones de Navier, suponiendo homogeneidad e isotropía del relleno y que

el muro era un sólido rígido, sujeto a traslaciones y rotaciones en su base. Tajimi (53, 54) empleó la teoría bidimensional de propagación de ondas para calcular las presiones sobre un muro de sótano vertical, rígido y liso. En todos estos casos las soluciones están presentadas para excitaciones armónicas. Los autores de los trabajos citados reportan semejanzas cualitativas con resultados experimentales. De las referencias consultadas, la que trata con más detalle y profundidad esta clase de problemas es la ya citada de Wood (43). Recientemente, el autor ha propuesto un modelo elástico simplificado, algunas de cuyas implicaciones fueron publicadas en (32) y (55).

Modelo de Scott. Mención aparte merece el modelo propuesto por Scott (56) en el cual el relleno es representado por una viga de cortante de eje vertical, empotrada en la base y libre en su extremo superior, acoplada al muro mediante un medio de Winkler. Se trata de un modelo elástico unidimensional, uno de cuyos méritos es la sencillez, aunque el principal de todos reside en que permite aplicar el método de análisis modal y hacer uso de los espectros de respuesta.

La formulación de Scott permite, además, considerar variaciones de la rigidez de cortante del relleno según la vertical y tener en cuenta la flexibilidad de la estructura y de su fundación. Hadjian (57) propone algunos refinamientos del modelo consistentes principalmente en agregar amortiguadores para tener en cuenta los efectos disipativos.

El talón de Aquiles del modelo de Scott está en la elección de la rigidez del medio de Winkler que acopla la viga de cortante con el muro. Propone una manera de hacer dicha elección basándose en los resultados de Wood (43) para rellenos cuya extensión en la dirección perpendicular a la pared es finita, pero no da indicación alguna de cómo proceder cuando dicha extensión es muy grande o seminfinita. Además, la expresión para la rigidez del medio de Winkler dada por Scott conduce a ciertos resultados absurdos. Por ejemplo, si el relleno está solicitado por un campo horizontal uniforme, independiente del tiempo, el empuje total

sobre el muro resulta proporcional a H^3 y el momento de volteo de las presiones, proporcional a H^4 (para rellenos suficientemente extensos en la dirección perpendicular al muro). Esto contradice la evidencia experimental, los resultados de la teoría clásica de la elasticidad y los de la teoría de Mononobe-Okabe y sus modificaciones. Para obtener una reconciliación del modelo de Scott con la experiencia y los resultados de otras teorías es preciso suponer que la rigidez del medio de Winkler es inversamente proporcional a la altura del muro; igual cosa vale para los amortiguadores propuestos por Hadjian.

El modelo de Scott se puede generalizar representando el relleno por un conjunto de vigas de cortante acopladas, entre sí y al muro, mediante resortes (y, eventualmente, mediante amortiguadores también). Dicha generalización equivale al modelo propuesto por el autor (32, 55).

Un modelo generalizado de Scott como el recién descrito ha sido empleado por Tanaka y Nakahara (Proc. 7th WCEE, vol 6, pp. 73-80, 1980) para calcular la respuesta estructural del edificio de un reactor nuclear y compararla con la respuesta observada durante un temblor de magnitud 7.4 que produjo una aceleración máxima de 80 gal en el sótano. La concordancia obtenida es satisfactoria. Desgraciadamente los autores no dan resultados sobre la presión de tierras en los muros de sótano, porque su interés era la estructura del edificio.

La hipótesis de linealidad en que se basan los modelos elásticos, incluido el de Scott, limita el rango de su aplicabilidad a aquellas estructuras que sólo pueden experimentar desplazamientos pequeños en el sentido fijado por la ec 1.12.

Modelos no lineales. El uso de modelos continuos no lineales en problemas de dinámica de suelos está aun en su infancia. Las dificultades principales son la formulación de relaciones constitutivas adecuadas al problema, la enorme diferencia de rigidez entre los materiales estructurales (concreto y acero) y el material del relleno y el costo de procesa-

miento numérico que sólo se justifica en el caso de obras de gran importancia o de mucho riesgo. Una dificultad adicional aparece si se trata de reproducir en forma realista la condición de borde en el contacto entre muro y relleno cuando se produce despegue.

Algunas publicaciones en las cuales se emplean modelos continuos no lineales en relación con problemas de empuje de tierras en condiciones dinámicas son las de Aubry y Chouvet (58-59), de Kausel et al. (60) y de Nazarian y Hadjian (61). El uso de los métodos desarrollados por Bejtschko y Mullen (62) y por Hughes y Liu (63-64) parece ofrecer perspectivas interesantes.

Estudios experimentales. Wood (43) hace un resumen interesante de los resultados de experimentos de laboratorio bajo excitación dinámica y señala las limitaciones y dificultades del método experimental:

- (1) La mayor parte de las cajas empleadas en los ensayos eran demasiado cortas, de manera que las presiones en la pared objeto de las mediciones quedaban influidas por la pared opuesta
- (2) La flexibilidad de las celdas medidoras de presión y la restricción impuesta por las paredes laterales de la caja tienden a reducir los valores medidos para las presiones sobre la pared estudiada.
- (3) Los rangos de frecuencia empleados en las mediciones son muy estrechos y, en general, se han empleado frecuencias demasiado bajas. El análisis dimensional conduce a la conclusión que para preservar la semejanza mecánica, los ensayos deben efectuarse para frecuencias significativamente mayores que las del prototipo.
- (4) Los periodos de vibración de las funciones forzantes empleadas en los ensayos parecen haber sido bastante mayores que el periodo fundamental del sistema pared-suelo del modelo, de manera que la posibilidad de resonancia con el primer modo, que es el impor-

tante desde el punto de vista del empuje total y del momento de volteo, ha quedado excluida en los experimentos.

- (5) Para que los resultados experimentales obtenidos en modelos sean aplicables al prototipo es necesario satisfacer condiciones de semejanza difíciles de cumplir como son las que se refieren a flexibilidad de la pared, al criterio de falla del suelo y a la presión de confinamiento efectiva que influye notablemente en el estado del suelo en la falla y en sus propiedades elásticas.

Algunas de estas objeciones han sido superadas en experimentos más recientes como los de Ichihara y Matsuzawa (35) y de Matsuzawa y Matsumura (65). Según la primera de estas referencias, el desplazamiento lateral de la pared necesario para inducir el estado activo en un relleno de arena densa e independiente del nivel de aceleración y está comprendido entre $5.4 \times 10^{-4} H$ y $7.3 \times 10^{-4} H$. Para el estado pasivo, los autores de (65) encontraron desplazamientos laterales necesarios prácticamente independientes del nivel de aceleración empleado en las pruebas y aproximadamente iguales a $2 \times 10^{-2} H$, lo que da una relación entre los desplazamientos para los dos casos comprendida entre 1:27 y 1:37. En la ref. (11) el autor ha encontrado que la relación entre los desplazamientos necesarios para inducir, respectivamente, los estados activo y pasivo en un suelo granular es del orden de $1:8 K_p$. Para $\phi = 35^\circ$, 40° y 45° esta relación teórica vale respectivamente 1:29.5, 1:36.8 y 1:46.6. La comparación resulta lícita proque en ambas series de experimentos se emplearon rellenos de espesores aproximadamente iguales.

3. MODELO ELASTICO SIMPLIFICADO DEL RELLENO

Se supondrá que las características geométricas y mecánicas del relleno y de la estructura de contención, así como la función forzante y las fuerzas de ligazón, son invariantes para una traslación paralela al eje horizontal Oz. Esta hipótesis implica, entre otras cosas, que la estructura de contención es de longitud infinita en la dirección de Oz,

y que su eje longitudinal es recto. Obviamente el problema del movimiento del sistema es un problema de deformación plana y se le podrá formular y analizar en un plano coordenado Oxy , perpendicular al eje Oz . Se emplearán coordenadas cartesianas ortogonales, con Ox horizontal y dirigido hacia el relleno y Oy vertical ascendente.

Se postulará que el relleno tiene las siguientes propiedades:

- H.1. El relleno se comporta como un medio elástico continuo, sin cuplas de esfuerzo.
- H.2. Los esfuerzos normales verticales en el relleno son nulos.
- H.3. Los esfuerzos y deformaciones están relacionados por las siguientes ecuaciones constitutivas:

$$\sigma_x = K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = K_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \quad (3.1)$$

donde

$u = u(x,y,t)$ es el desplazamiento del relleno en la dirección Ox , en el lugar de coordenadas (x, y) , para el tiempo t

$K_{xx} = K_{xx}(x,y)$, $K_{yx} = K_{yx}(x,y)$ son coeficientes de elasticidad que, en general, serán funciones de x e y .

$\sigma_x = \sigma_x(x,y,t)$ es el esfuerzo unitario normal en un plano normal al eje Ox , positivo para el caso de tracción y negativo en el caso de compresión

$\tau_{yx} = \tau_{yx}(x, y,t)$ es el esfuerzo tangencial unitario en un plano normal al eje Oy y en la dirección del eje Ox , positivo cuando actúa en el sentido positivo del eje Ox y la normal exterior del elemento considerado apunta en el sentido positivo del eje Oy .

Con las hipótesis enunciadas y admitiendo que los desplazamientos son pequeños, se obtiene la siguiente ecuación diferencial del movimiento:

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \rho X \quad (3.2)$$

donde

$\rho = \rho(x,y)$ es la densidad de masa del material del relleno
 $X = X(x,y,t)$ es la proyección sobre Ox de las fuerzas de cuerpo por unidad de masa

Relleno homogéneo.

Si el relleno es homogéneo, K_{xx} , K_{yx} y ρ son constantes. En tal caso es conveniente introducir dos constantes positivas α y β tales que

$$K_{xx} = \rho\alpha^2, \quad K_{yx} = \rho\beta^2 \quad (3.3)$$

Con esta notación, la ec 3.2 toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + X \quad (3.4)$$

Para fuerzas de cuerpo nulas ($X \equiv 0$), esta ecuación se puede reducir a la ecuación bidimensional de ondas mediante un cambio adecuado de las variables espaciales. En efecto, haciendo

$$x = \alpha\xi, \quad y = \beta\eta \quad (3.5)$$

se obtiene, para $X \equiv 0$,

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \quad (3.6)$$

Dos casos particulares son especialmente importantes

a) Si $X \equiv 0$, y u no depende de x , la ec 3.4 toma la forma

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \beta^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (3.7)$$

b) Si $X \equiv 0$, y u no depende de y , dicha ecuación se reduce a

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.8)$$

Se deduce de aquí que en el medio postulado se pueden propagar ondas planas de cortante puro en la dirección Oy con la velocidad de propagación β , y ondas planas de compresión y dilatación en la dirección Ox con velocidad de propagación α . Esto da un significado físico a las constantes α y β .

Más en general, si F es una función arbitraria que posee segunda derivada, la función

$$u = F(mx + ny \pm ct) \quad (3.9)$$

es solución de la ec. 3.4 para el caso de fuerzas de cuerpo nulas ($X \equiv 0$), siempre que m, n, c sean constantes que cumplen las condiciones

$$\begin{aligned} c^2 &= m^2 \alpha^2 + n^2 \beta^2 \\ m^2 + n^2 &= 1 \end{aligned} \quad (3.10)$$

Por consiguiente, en el medio postulado se pueden propagar ondas planas en cualquiera dirección definida por los cosenos directores (m, n) con la velocidad de propagación c dada por la primera de las ecuaciones 3.10.

Es fácil demostrar que c satisface la desigualdad

$$\beta \leq c \leq \alpha \quad (3.11)$$

y que en esta relación las alternativas de igualdad ocurren si la dirección de propagación es paralela a Oy o paralela a Ox . En el primer caso $c = \beta$ y se trata de ondas de cortante puro; en el segundo, $c = \alpha$ y las ondas son de compresión y dilatación. Para toda otra dirección de propagación, las ondas no son ni de corte puro ni de dilatación pura; pero, en todos los casos los desplazamientos de las partículas del medio son paralelos a Ox .

Conviene observar que el medio postulado no es isótropo y no presenta efectos que se puedan considerar estrictamente como del tipo Poisson. Por consiguiente, aun en el caso homogéneo, el modelo difiere significativamente del sólido elástico de Hooke, homogéneo e isótropo. Tampoco existe un sólido elástico clásico que sea equivalente al modelo propuesto para toda clase de problemas, aunque se consideren modelos elásticos clásicos no isótropos.

El propósito del modelo propuesto es analizar de manera simplificada aquellos problemas en que los desplazamientos en la dirección Ox predominan francamente. La ventaja respecto de modelos basados en la teoría clásica de la elasticidad es que los esfuerzos y deformaciones que interesan quedan completamente determinados cuando se conoce la función $u(x,y,t)$. En los problemas planos de la teoría clásica se necesita conocer dos funciones, $u(x,y,t)$, $v(x,y,t)$, que son las componentes del desplazamiento según Ox y según Oy , respectivamente; o bien funciones a partir de las cuales se puedan determinar u y v . En la teoría clásica u y v satisfacen ecuaciones a derivadas parciales del segundo orden, acopladas entre sí. Justamente la presencia de los términos de acoplamiento es la fuente principal de las dificultades analíticas que presentan los problemas de elasticidad clásica. En el modelo propuesto, esas dificultades han sido obviadas al postular las ecuaciones constitutivas 3.1. El precio que hay que pagar por esta simplificación es que los resultados serán aplicables a una clase restringida de problemas: aquellos en que los efectos horizontales (paralelos a Ox) sean los predominantes.

Con el objeto de establecer una relación aproximada con el modelo elástico clásico se considerarán dos casos simples de deformación homogénea en rellenos homogéneos: cizalle horizontal simple y compresión (o dilatación) horizontal uniforme. Se puede establecer que para estos dos casos los resultados del modelo propuesto coinciden con los de la elasticidad clásica para un sólido de Hooke, homogéneo e isótropo, si las constantes K_{xx} , K_{yx} se eligen de manera que

$$K_{yx} = G, \quad K_{xx} = \frac{E}{1-\nu^2} \quad (3.12)$$

donde E , G y ν son, respectivamente, el módulo de Young, el módulo de rigidez y el coeficiente de Poisson del sólido de Hooke. Se deduce que α y β están relacionadas con ν a través de la ecuación

$$\alpha = \beta \sqrt{\frac{2}{1-\nu}} \quad (3.13)$$

Conviene observar que en la teoría clásica (sólido de Hooke, homogéneo e isótropo), se encuentra que tanto las ondas de cuerpo de cortante puro como las de dilatación se pueden propagar en cualquiera dirección con velocidades V_s y V_p relacionadas a través de la ecuación

$$V_p = V_s \sqrt{\frac{2(1-\nu)}{1-2\nu}} \quad (3.14)$$

En consecuencia,

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{V_p}{V_s}$$

si y sólo si $\nu = 0$.

Matsuo y Ohara (51) han propuesto un modelo elástico simplificado que se obtiene a partir de las ecuaciones del movimiento de la teoría clásica de la elasticidad, expresadas en términos de las derivadas de los desplazamientos, despreciando la contribución de los desplazamientos verticales. La ecuación diferencial para u que se obtiene de esta mane-

ra es formalmente la misma que la ecuación 3.2 con K_{xx} y K_{yx} constantes; pero la relación entre las constantes y los parámetros elásticos E , G y ν es distinta de la que aquí se da en la ec. 3.12. Llamando K'_{xx} , K'_{yx} las constantes elásticas del modelo de Matsuo y Ohara se tiene

$$K'_{yx} = K_{yx} = G; \quad K'_{xx} = \frac{(1-\nu)E}{(1-2\nu)(1+\nu)} \quad (3.15)$$

El modelo de Matsuo y Ohara coincide con el aquí propuesto si y sólo si $\nu = 0$.

Como se verá oportunamente, el modelo de Matsuo y Ohara conduce a resultados absurdos en problemas de elastostática cuando $\nu = \frac{1}{2}$.

4. GENERALIZACIONES

El modelo propuesto se puede generalizar de varias maneras sin que pierda su simplicidad. Por ejemplo, para tener en cuenta efectos tridimensionales se puede agregar en el segundo miembro de la ec 3.2 un término de la forma

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K_{zx} \quad \frac{\partial u}{\partial z} \right] \quad (4.1)$$

Esta generalización resulta útil, por ejemplo, en el análisis de las presiones del relleno sobre el muro frontal de estribos de puente bajo acción sísmica, cuando se desee tener en cuenta la restricción introducida por las alas del estribo, o cuando se pretenda obtener el empuje sobre muros de contención cuya longitud es comparable con la altura.

Los efectos disipativos en el seno del relleno se pueden considerar modificando las ecuaciones constitutivas 3.1 como se indica a continuación:

$$\sigma_x = K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} + C_{xx} \frac{\partial \dot{u}}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = K_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} + C_{yx} \frac{\partial \dot{u}}{\partial y} \quad (4.2)$$

donde C_{xx} , C_{yx} son coeficientes que dependen de x e y , pero no de t , y el punto sobre u indica derivación respecto del tiempo. Con esta modificación, la ecuación diferencial del movimiento queda en la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left[K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[K_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial x} \left[C_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right] + \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial}{\partial y} \left[C_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right] + \rho X \quad (4.3)$$

Tiene especial interés el caso en que exista una constante κ tal que

$$C_{xx} = \kappa K_{xx}, \quad C_{yx} = \kappa K_{yx} \quad (4.4)$$

La ec. 4.3 toma entonces la forma

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \left[1 + \kappa \frac{\partial}{\partial t} \right] \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yx} \frac{\partial u}{\partial y} \right) \right] + \rho X \quad (4.5)$$

La correspondiente ecuación homogénea (ec. 4.5 con $X \equiv 0$) es separable. En efecto, escribiendo

$$u = u(x, y, t) = \phi(x, y) f(t) \quad (4.6)$$

la ec. 4.5, para $X \equiv 0$, se separa en la ecuación en derivadas parciales para ϕ

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(K_{xx} \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(K_{yx} \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \lambda^2 \rho \phi = 0 \quad (4.7)$$

y la ecuación diferencial ordinaria para f

$$f + \lambda^2 \kappa f + \lambda^2 f = 0 \quad (4.8)$$

donde λ^2 es la constante o parámetro de separación.

Introduciendo una nueva constante ζ definida por la relación

$$\kappa\lambda = 2\zeta \quad (4.9)$$

la ec. 4.8 se reduce a la bien conocida ecuación de las oscilaciones libres de un oscilador lineal simple con amortiguamiento viscoso ζ (expresado como fracción del amortiguamiento crítico) y frecuencia circular natural no amortiguada λ .

5. DISCRETIZACIONES DEL MODELO Y RELACION CON LOS DE AMBRASEYS Y DE SCOTT

El modelo propuesto se puede discretizar de varias maneras. Una de ellas es la que se muestra en la Fig. 1, formada por masas m_{rs} dispuestas sobre una malla cuadrada de lado h , acopladas entre sí por resortes horizontales capaces de transmitir solamente esfuerzos axiales y de deformarse por dilatación o compresión, y por resortes verticales que solamente pueden deformarse transversalmente y transmitir esfuerzos de cortante. En general, tanto las masas como las rigideces de los resortes serán función de la posición que ocupan en la malla. Esta representación discreta podría haberse empleado en lugar del modelo original y, en tal caso, las ecuaciones del modelo continuo se podrían haber obtenido por un proceso de límites, haciendo tender a cero el tamaño h de la celda típica.

Si se particiona la Fig 1 por medio de planos verticales y se sustituyen los resortes horizontales de compresión situados dentro de cada partición por vínculos rígidos (bielas), cada partición se comportará como una viga vertical de cortante. Si, en seguida, se acoplan entre sí los ejes de las vigas contiguas por medio de resortes de compresión de flexibilidad igual a la suma de las flexibilidades de los resortes de compresión que en el modelo discreto original estaban entre los ejes de cada dos vigas contiguas, se obtiene el modelo generalizado de Scott, con la diferencia de que la flexibilidad de los resortes que acoplan las vigas entre sí depende de la forma en que se hayan elegido los planos de

partición. En general, la masa por unidad de largo vertical y la rigidez local de cortante de cada viga dependerá de la coordenada vertical y también del número de orden de la viga.

Si la Fig. 1 se particiona por medio de planos horizontales y dentro de cada partición se reemplazan los resortes verticales de cortante por vínculos rígidos, el material situado dentro de una partición cualquiera se comportará como una barra elástica, deformable a la tensión y a la compresión. Si, en seguida, se acoplan entre sí los ejes de las barras contiguas por medio de resortes de cortante de flexibilidad igual a la suma de las flexibilidades de los resortes de cortante que en el modelo discreto de Fig. 1 estaban situados entre los ejes de cada par de barras contiguas, se obtiene el modelo propuesto por Ambraseys (66) para el análisis de presas de tierra. En general la masa por unidad de largo horizontal y la rigidez local de cada barra será función de la coordenada horizontal y del número de orden de la barra.

Resulta así que los modelos de Scott y de Ambraseys son casos particulares del que aquí se ha propuesto. Desde el punto de vista de su aplicación al análisis sísmico de estructuras de contención de tierras, la discretización por medio de barras horizontales tiene la ventaja de que un relleno estratificado horizontalmente queda representado por un modelo de barras en el cual las propiedades mecánicas de cada barra (masa por unidad de largo y rigidez) son constantes; esto introduce simplificaciones analíticas importantes, ya que la ecuación en derivadas parciales 3.2 que contiene dos variables independientes espaciales (x,y) queda sustituida por un sistema de ecuaciones en derivadas parciales en una variable espacial con coeficientes constantes. En cambio, si se empleara la discretización por medio de vigas de cortante, las ecuaciones tendrán coeficientes que serían funciones de la variable y , salvo en el caso de relleno homogéneo.

Discretizaciones similares a la de barras y a la de viga de cortante aquí descritas han sido empleadas por Flores et al. (67).

6. PARED VERTICAL RIGIDA Y FIJA. RELLENO HOMOGENEO
SOBRE UNA BASE HORIZONTAL FIJA SOMETIDO A UNA
FUERZA DE CUERPO CONSTANTE

Considérese una pared rígida y fija, de altura H, longitud infinita y eje recto, que sostiene a un material que satisface las hipótesis H.1, H.2 y H.3. Se supondrá que el material del relleno está soldado a una base fija y rígida, limitada por un plano horizontal situado al mismo nivel que la base de la pared con el cual es solidaria. Se supondrá, además, que el relleno permanece en contacto con la pared vertical y está sometido a una fuerza de cuerpo

$$X = - a \quad (6.1)$$

donde a es una constante positiva.

Se considerarán tres casos, como lo señala la Fig. 2., donde se ha indicado, además, el sistema de ejes coordenados que se empleará. Para los tres casos valen la siguiente ecuación diferencial

$$\alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_{yy} = a, \quad u = u(x,y) \quad (6.2)$$

y las condiciones de frontera

$$u(0,y) = 0, \quad u(x,0) = 0, \quad u_y(x,H) = 0 \quad (6.3)$$

donde los subíndices indican derivación parcial.

La condición de borde en la frontera vertical alejada del muro de contención es diferente para cada caso y se especificará al hablar de cada uno de ellos.

Relleno seminfinito.

La condición de borde al infinito es

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,y) = u_0(y) \equiv \frac{a}{2\beta^2} (y^2 - 2Hy) \quad (6.4)$$

La función $u_0(y)$ se puede interpretar como el desplazamiento debido a la fuerza de cuerpo especificada por la ec 6.1 en una capa del material de relleno, de espesor H, que se extendiera indefinidamente en los dos sentidos del eje Ox .

La solución de las ecs. 6.2-4 es

$$u(x,y) = u_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{-\lambda_n x} \phi_n(y) \quad (6.5)$$

donde

$$\phi_n(y) = \text{sen } \mu_n y$$

$$\lambda_n = \frac{\beta \mu_n}{\alpha} \quad (6.6)$$

$$\mu_n = \frac{(2n-1)\pi}{2H}$$

y los coeficientes A_n se obtienen desarrollando $u_0(y)$ en una serie de Fourier de senos de la forma

$$u_0(y) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \text{sen } \mu_n y \quad (6.7)$$

Una vez conocido $u(x,y)$ se pueden obtener expresiones para la presión sobre la pared, $p(y)$, el empuje total, P , y el momento de volteo de las presiones respecto de la base, M :

$$p(y) = \frac{8\gamma H a \alpha}{\pi^2 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(y)}{(2n-1)^2} \quad (6.8)$$

$$P = \frac{16\gamma H^2 a \alpha}{\pi^3 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \approx 0.543 \frac{\gamma H^2 a \alpha}{g \beta} \quad (6.9)$$

$$M = \frac{32\gamma H^3 a}{\pi^4 g\beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^4} \approx 0.325 \frac{\gamma H^3 a}{g\beta} \quad (6.10)$$

donde γ es el peso del material por unidad de volumen y g es la aceleración debida a la gravedad.

La resultante P queda aplicada a la altura \bar{h} sobre la base dada por

$$\bar{h} = \frac{M}{P} \approx \frac{0.325}{0.543} H \approx 0.6H \quad (6.11)$$

Relleno de longitud finita

Se considerarán dos casos: relleno completamente fijo en $x=L$, y relleno libre en $x=L$. La condición de borde en $x=L$ es

$$u(L,y) = 0 \quad (6.12)$$

en el primer caso,

$$u_x(L,y) = 0 \quad (6.13)$$

en el segundo.

En ambos casos la solución puede expresarse en la forma

$$u(x,y) = \sum_{n=1}^{\infty} \left[B_n \cos h \lambda_n x + C_n \operatorname{sen} h \lambda_n x \right] \Phi_n(y) \quad (6.14)$$

Los coeficientes B_n , C_n se determinan en cada caso para satisfacer la condición de borde en $x=0$ y la que corresponda de las dos condiciones 6.12 y 6.13 según se trate de extremo fijo o extremo libre.

Las soluciones encontradas se han comparado con resultados basados en la teoría clásica de la elasticidad. El propósito ha sido el de calibrar la bondad del modelo propuesto.

En la Fig. 3 se muestra la distribución de presiones correspondiente al caso (b) de Fig. 2 para una relación $L/H = 5$ y $\nu = 0.3$. Junto con la curva que se deduce de la ec. 6.14 se muestran dos soluciones calculadas empleando el método del elemento finito y las ecuaciones de la elasticidad clásica. Una de esas soluciones corresponde al caso de paredes verticales perfectamente lisas ($\tau = 0$) y ha sido publicada por Wood (43); la otra corresponde al caso de adherencia perfecta en la pared vertical (desplazamiento vertical nulo). Como se puede apreciar, las distribuciones de presiones de la teoría elástica son muy parecidas a la que se obtiene con el modelo aquí postulado.

En la Fig. 4 se hace la comparación de los empujes y momentos de volteo para una amplia gama de valores de L/H y valores de ν comprendidos entre 0.1 y 0.5. La concordancia es muy satisfactoria.

Cabe observar dos cosas: primera, que cuando se cumple la desigualdad

$$\frac{L\beta}{H\alpha} = \frac{L}{H} \sqrt{\frac{1-\nu}{2}} > 2 \quad (6.15)$$

tanto el empuje total como el momento de volteo resultan prácticamente independientes de la razón L/H , y segunda, que donde la teoría elástica clásica necesita de una curva para cada valor de ν para representar la variación de P (o de M) en función de L/H , la teoría simplificada necesita solo una curva universal. Es decir, la teoría simplificada logra aclarar, aunque sea de manera solamente aproximada, el papel que juega el parámetro ν y la manera como influye su variación en P y en M .

La primera de estas observaciones vale, además, para la distribución de las presiones sobre la pared vertical ($x=0$). Si se cumple la desigualdad 6.15, dicha distribución es prácticamente independiente de la relación L/H y de la naturaleza de la condición de frontera en el extremo alejado de la pared. Es decir, cuando se cumple la condición 6.15, el

relleno se comporta prácticamente como si su extensión en la dirección perpendicular a la pared fuera seminfinita. Por supuesto que estas conclusiones valen solamente en condiciones estáticas y habrá que re-examinar su validez cuando se trate de problemas dinámicos.

Desde el punto de vista práctico, la conclusión recién anotada conduce, por una parte, a una simplificación de los cálculos, ya que numerosos rellenos de extensión finita se podrán considerar como si fueran seminfinitos. Por otra parte, la conclusión mencionada fija el largo mínimo L que debe darse a los modelos de laboratorio de mecánica de suelos para estudiar el empuje de tierras, de manera que se garantice que la influencia de la pared opuesta a la que es objeto de las mediciones sea despreciable. Bastará elegir L mayor que cuatro o cinco veces H .

De paso, conviene dejar anotado aquí que el modelo de Matsuo y Ohara habría conducido a valores infinitos de P para $\nu = 0.5$.

Y una última observación:

De acuerdo con las ecs. 6.8 y 6.14, tanto en el caso de relleno finito como seminfinito, la distribución de presiones resulta de la superposición de arcos de senoide que contienen un número impar de cuartos de período en el intervalo $0 < y < H$. La contribución al empuje y al momento de volteo de estas componentes sinusoidales de la distribución de presiones decrece rápidamente al aumentar el número de orden, n . Así, por ejemplo, el segundo término de la serie de ec. 6.9 es $\frac{1}{27} \approx 0.037$, y el tercero $\frac{1}{125} = 0.008$. (Para la serie de ec. 6.10, el segundo término es $\frac{1}{81} \approx 0.012$ y el tercero $\frac{1}{625} = 0.0016$). Se deduce que, dentro de las aproximaciones inherentes a una disciplina como la mecánica de suelos, nos podemos conformar con el primer término de cada una de esas series.

El error cometido en la evaluación de P al limitar la serie a solo el primer término es de 5%, por defecto; para el momento de volteo, M , el error correspondiente es de 1%, por exceso. Habrá que ver si lo mismo es válido tratándose de problemas de dinámica.

7. PARED RIGIDA FIJA. RESPUESTA DINAMICA DEL RELLENO

7.1 Excitación sísmica

Supóngase que la base y la pared de la Fig. 2a se mueven en la dirección del eje Ox como un solo cuerpo rígido con una aceleración $\ddot{s}(t)$ función arbitraria del tiempo. Sea $u(x,y,t)$ el desplazamiento del relleno respecto de la base provocado por esta excitación. Entonces $u(x,y,t)$ es la solución del problema con valores en la frontera descrito por la ecuación diferencial

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_{yy} - \ddot{s}(t) \quad (7.1)$$

y las condiciones de borde

$$u(0,y,t) = 0, \quad u(x,0,t) = 0, \quad u_y(x,H,t) = 0 \quad (7.2)$$

La solución de este problema es

$$u(x,y,t) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x,t) \Phi_n(y) \quad (7.3)$$

donde

$$f_n(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \int_{-\infty}^t \ddot{s}(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{\text{sen } \lambda x \text{ sen } R_n(t-\tau) d\lambda}{\lambda R_n (2n-1)} \quad (7.4)$$

con

$$R_n = \sqrt{\lambda^2 \alpha^2 + \Omega_n^2} \quad (7.5)$$

y

$$\Omega_n = \frac{(2n-1)\pi\beta}{2H} \quad (7.6)$$

La presión sobre la pared es

$$\begin{aligned}
 p(y,t) &= - \rho \alpha^2 u_x(0,y,t) \\
 &= \frac{8\rho\alpha^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(y)}{2n-1} \int_{-\infty}^t \ddot{s}(\tau) d\tau \int_0^{\infty} \frac{\text{sen}(R_n(t-\tau)}{R_n} d\lambda
 \end{aligned} \quad (7.7)$$

Haciendo la sustitución

$$R_n = \mu \Omega_n \quad (7.8)$$

o bien

$$\lambda = \frac{\Omega_n}{\alpha} \sqrt{\mu^2 - 1} \quad (7.8)$$

la integral interior de la ec. 7.7 se transforma en

$$\int_0^{\infty} \frac{\text{sen} \mu \Omega_n(t-\tau)}{\alpha \sqrt{\mu^2 - 1}} d\mu = \frac{\pi}{2\alpha} J_0 \Omega_n(t-\tau) \quad (7.9)$$

donde $J_0(.)$ es la función de Bessel de primera especie y orden cero; véase, p.ej., Gradshteyn y Ryzhik, 1965, 3.753.2, p. 419 (67).

Introduciendo la función de dos variables $S(t,\Omega)$ definida por la relación

$$S(t, \Omega) = \Omega \int_{-\infty}^t \ddot{s}(\tau) J_0 [\Omega(t-\tau)] d\tau \quad (7.10)$$

la expresión para la presión $p(y,t)$ se puede poner en la forma

$$p(y,t) = \frac{8\gamma H \alpha}{\pi^2 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\Phi_n(y)}{(2n-1)^2} S(t, \Omega_n) \quad (7.11)$$

Se deduce inmediatamente que la resultante $P(t)$ de las presiones y su momento resultante respecto de la base de la pared están dados, respectivamente por

$$P(t) = \frac{16\gamma H^2 \alpha}{\pi^3 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{S(t, \Omega_n)}{(2n-1)^3} \quad (7.12)$$

y

$$M(t) = \frac{32\gamma H^3}{\pi^4 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} S(t, \Omega_n)}{(2n-1)^4} \quad (7.13)$$

La función $S(t, \Omega)$ parece haber sido introducida por primera vez en la literatura sobre ingeniería sísmica por Kotsubo (68) y por Ferrandon (69) en relación con el problema de las presiones hidrodinámicas sobre una pared rígida vertical.

Por analogía con la teoría de la respuesta sísmica de estructuras lineales simples con amortiguamiento nulo, se definirá un espectro de respuesta $B(\Omega, 0)$ a través de la relación

$$B(\Omega, 0) = \sup_t \{ |S(t, \Omega)| \} \quad (7.14)$$

y se le dará el nombre de espectro de aceleración de Bessel de la excitación para amortiguamiento nulo.

Con esta definición resulta de inmediato que la presión, el empuje y el momento de volteo quedan acotados por las siguientes expresiones

$$|p(y, t)| \leq \frac{8\gamma H \alpha}{\pi^2 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\Omega_n, 0)}{(2n-1)^2} \quad (7.15)$$

$$|P(t)| \leq \frac{16\gamma H^2 \alpha}{\pi^3 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\Omega_n, 0)}{(2n-1)^3} \quad (7.16)$$

$$|M(t)| \leq \frac{32\gamma H^3 \alpha}{\pi^4 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B(\Omega_n, 0)}{(2n-1)^4} \quad (7.17)$$

La teoría se puede generalizar para incluir el efecto de la presencia de amortiguamiento interno en el relleno. Empleando las relaciones 4.4, que definen una clase particular de amortiguamiento viscoso, la ecuación diferencial 7.1 debe sustituirse por la siguiente

$$u_{tt} = (1 + \kappa \frac{\partial}{\partial t})(\alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_{yy}) - \ddot{s}(t) \quad (7.18)$$

Las condiciones de borde siguen siendo las de ecs. 7.2. Los resultados finales son de la misma forma que los expresados por las ecs. 7.11-13, salvo que en lugar de la función de dos variables $S(t, \Omega)$ hay que introducir una función de tres variables $S(t, \Omega; \zeta)$ definida por

$$S(t, \Omega; \zeta) = \frac{2 \Omega}{\pi \sqrt{2 - \zeta^2}} \int_{-\infty}^t \ddot{s}(\tau) \operatorname{Im} K_0 [\Omega(t - \tau) e^{-i \arccos \zeta}] d\tau \quad (7.19)$$

donde ζ es el amortiguamiento expresado como fracción del crítico y está ligado al parámetro κ por la ec. 4.9; el símbolo Im indica parte imaginaria y $K_0(\cdot)$ es la función de Bessel modificada (función de Mac Donald) de orden cero.

Para el caso amortiguado se puede definir la función $B(\Omega, \zeta)$ que llamaremos espectro de aceleración de Bessel de la excitación para el amortiguamiento ζ por la relación

$$B(\Omega, \zeta) = \sup_t \{|S(t, \Omega; \zeta)|\} \quad (7.20)$$

Las cotas de ecs. 7.15-17 siguen valiendo con $B(\Omega, \zeta)$ en lugar de $B(\Omega, 0)$.

7.2 Respuesta impulsiva

Sea $u_i(x, y, t - \theta)$ la respuesta de desplazamientos del relleno a un pulso unitario de aceleración dado por

$$\ddot{s} = \delta(t - \theta) \quad (7.21)$$

donde $\delta(\cdot)$ es la distribución de Dirac. Para el caso no amortiguado se encuentra

$$u_i(x,y,t-\theta) = -\frac{8U(t-\theta)}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(y)}{2n-1} (x,t-\theta) \quad (7.22)$$

donde $U(\cdot)$ es la función escalón unitario de Heaviside y

$$h_n(x,t-\theta) = \begin{cases} \frac{\pi}{2\alpha} \int_0^{\alpha} J_0 \left[\frac{\Omega n}{\alpha} \sqrt{\alpha^2 (t-\theta)^2 - \xi^2} \right] d\xi, & 0 < x < \alpha (t-\theta) \\ \frac{\pi}{2\alpha} \sin \Omega_n (t-\theta), & x > \alpha (t-\theta) > 0 \end{cases} \quad (7.23)$$

Este resultado muestra que las ondas reflejadas en la pared vertical en el instante θ afectan los desplazamientos del relleno, hasta el instante t , sólo en la región $0 < x < \alpha (t-\theta)$, y no tienen influencia sobre ellos para $x > \alpha (t-\theta)$. Además, en la región que no ha sido alcanzada por el frente de ondas reflejadas, los desplazamientos del relleno no dependen de x , y son los mismos que registrarían para una capa que se extendiera indefinidamente en ambos sentidos del eje de la x .

Resultados similares se pueden obtener para el caso amortiguado.

7.3 Respuesta de frecuencias.

Sean $p(y, \omega) e^{i\omega t}$, $P(\omega) e^{i\omega t}$, $M(\omega) e^{i\omega t}$, respectivamente, la distribución de presiones sobre la pared, el empuje total y el momento de volteo causados por la excitación armónica

$$\ddot{s}(t) = e^{i\omega t} \quad (7.24)$$

Se puede demostrar que

$$p(y, \omega) = \frac{8\gamma H \alpha}{\pi^2 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\phi_n(y)}{(2n-1)^2} F_n(\omega, \zeta) \quad (7.25)$$

donde

$$F_n(\omega, \zeta) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{(1-r_n^2 \cos^2 \theta) - i 2\zeta r_n \cos \theta}{(1-r_n^2 \cos^2 \theta)^2 + (2\zeta r_n \cos \theta)^2} d\theta \quad (7.26)$$

y

$$r_n = \frac{\omega}{\Omega_n} \quad (7.27)$$

Integrando sobre la variable θ entre 0 y $\pi/2$ se obtiene para $P(\omega)$ la expresión

$$P(\omega) = \frac{16\gamma H^2 \alpha}{\pi^3 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n(\omega, \zeta)}{(2n-1)^3} \quad (7.28)$$

y, análogamente, para el momento de las presiones respecto de la base

$$M(\omega) = \frac{32\gamma H^3 \alpha}{\pi^4 g \beta} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} F_n(\omega, \zeta)}{(2n-1)^4} \quad (7.29)$$

La función $F_n(\omega, \zeta)$ se puede expresar en forma cerrada en términos de funciones elementales

Poniendo

$$F_n(\omega, \zeta) = X_n - i Y_n \quad (7.30)$$

se encuentra, después de un cálculo elemental pero tedioso,

$$\text{Re} F_n = X_n = \frac{A_n + (1-r_n^2)}{A_n \sqrt{2(A_n+B_n)}} \quad (7.31)$$

$$\begin{aligned} -\text{Im} F_n = Y_n = & \frac{2\zeta}{A_n} \left\{ \frac{1}{\sqrt{2(A_n+C_n)}} \arctg \left(\frac{r_n \sqrt{2(A_n+C_n)}}{C_n - r_n^2} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{\sqrt{2(A_n-C_n)}} \text{argtgh} \left(\frac{r_n (A_n-C_n)}{A_n + r_n^2} \right) \right\} \quad (7.32) \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
 A_n^2 &= (1 - r_n^2)^2 + 4\zeta^2 r_n^2 \\
 B_n &= 1 - r_n^2 + 2\zeta^2 r_n^2 \\
 C_n &= 1 - r_n^2 - 2\zeta^2
 \end{aligned}
 \tag{7.33}$$

Las funciones $\text{Re } F_n$, $-\text{Im } F_n$, $|F_n|$ y $-\arg F_n$ han sido representadas en las Figs. 5 y 6. Véase, además, Fig 7.

Conviene observar que la componente de F_n en fase con la excitación resulta importante en el rango de las frecuencias bajas (menores que la frecuencia Ω_n) y que para esas frecuencias dicha componente predomina francamente sobre la componente en cuadratura. Al revés, para frecuencias mayores que Ω_n es la componente en cuadratura la que predomina.

Se observará, además, que aparecen diferencias notorias al comparar la respuesta de frecuencia del relleno con la de un oscilador lineal simple con amortiguamiento viscoso, que tuviera el mismo grado de amortiguamiento ζ expresado como fracción del crítico y la misma frecuencia circular Ω_n . Tal vez la más importante sea que para amortiguamientos pequeños los valores máximos de $|F_n|$ son significativamente menores que los correspondientes máximos de la curva de respuesta del oscilador, como se señala en la tabla 4.

Mientras las ordenadas máximas de la respuesta de frecuencia del oscilador varían aproximadamente como $\frac{1}{2\zeta}$ ($\zeta < 1$), los máximos de $|F_n|$ son aproximadamente proporcionales a $\frac{1}{\sqrt{\zeta}}$.

De acuerdo con la ec. 7.3.2, $\text{Im } F_n$ es una función trascendente de la variable $\frac{\omega}{\Omega_n}$. Por lo tanto para cada n no hay manera de representar exactamente F_n como si fuera la función característica de un sistema mecánico de un número finito de grados de libertad con parámetros concen-

trados independientes de la frecuencia, ya que todo sistema de este último tipo tiene una función característica que es algebraica en la variable $\frac{\omega}{\Omega_n}$. El uso de modelos con parámetros concentrados dependientes de la frecuencia tiene, por otra parte, el inconveniente de violar los principios de la termodinámica y conduce, en general, a sistemas que no son causales (respuesta anterior a la excitación). Estas dificultades no excluyen la posibilidad de aproximar razonablemente el comportamiento del relleno mediante modelos simples con parámetros concentrados independientes de la frecuencia. Los modelos así obtenidos no violan principios físicos y pueden emplearse dentro de un rango de frecuencias limitado adecuadamente de acuerdo con el contenido de frecuencias de la excitación.

Si la excitación tiene un módulo de Fourier que presenta valores pequeños fuera del soporte $0 \leq \omega' < |\omega| < \omega''$, sólo contribuirán significativamente a la respuesta aquellos modos del relleno cuyas frecuencias Ω_n satisfacen la relación $\omega' < \Omega_n < \omega''$. Si, además, el módulo de Fourier de la excitación es una función suave en el intervalo señalado, las contribuciones importantes serán las de los modos de más baja frecuencia, de entre los ya identificados. Lo usual será que las contribuciones más significativas al empuje total y al momento de volteo sean las del modo fundamental. En tal caso se podrá modelar aproximadamente el relleno como un sistema de un grado de libertad con parámetros independientes de la frecuencia.

Mientras no se disponga de los espectros de Bessel de un buen número de temblores reales representativos, el uso de modelos lineales con parámetros concentrados resultará útil porque dichos modelos permiten emplear el enfoque usual en el análisis sísmico de estructuras, basado en espectros de respuesta de sistemas lineales de un grado de libertad con amortiguamiento viscoso. El problema consiste en definir adecuadamente las características mecánicas de los osciladores que se emplearán para representar aproximadamente el comportamiento de cada modo de relleno.

8. MODELO DE PARAMETROS CONCENTRADOS

Hay varias posibilidades de elección de un modelo lineal de un grado

de libertad para representar cada modo del relleno, posibilidades que difieren entre sí por la manera de acoplar la masa del modelo al muro y a la base. Con la idea de mantener el modelo lo más simple posible se analizarán solamente dos, que son las representadas en la Fig 8 (a) y (b). El de la primera alternativa mencionada ha sido empleado por Wood (43) al estudiar el empuje sobre paredes que pueden girar en torno de su base.

Cuando se aplica un campo de fuerzas, independiente del tiempo, de intensidad a , la reacción del resorte es, para cualquiera de los dos modelos,

$$(P_n)_{est} = m_n a \quad (8.1)$$

Comparando con la ec. 6.9 se deduce que esta fuerza coincide con el n -ésimo término de la expresión del empuje sobre el muro en condiciones estáticas para el modelo elástico continuo postulado en el capítulo 3, si se elige

$$m_n = \frac{16\gamma H^2}{(2n-1)^3 \pi^3} \frac{\alpha}{g\beta} \quad (8.2)$$

La frecuencia circular natural para amortiguamiento nulo es en cualquiera de las alternativas (a) o (b)

$$\Omega_n = \sqrt{\frac{k_n}{m_n}}$$

Exigiendo que esta frecuencia coincida con la del n -ésimo modo del relleno se obtiene para la rigidez k_n del resorte la expresión

$$k_n = m_n \Omega_n^2 = \frac{4\alpha\beta\gamma}{(2n-1)\pi g} \quad (8.3)$$

La cota h_n a la cual debe ir acoplada la masa al muro está deter-

minada por

$$h_n = \frac{(-1)^{n+1} 2H}{(2n-1) \pi} \quad (8.4)$$

con lo cual se asegura que el valor y la signatura de cada componente modal del momento de volteo son los correctos.

En ambos modelos, la ecuación diferencial del movimiento relativo de la masa m_n es

$$m_n \ddot{u}_n + c_n \dot{u}_n + k_n u_n = - m_n \ddot{s}(t) \quad (8.5)$$

donde $s(t)$ es el desplazamiento absoluto, común a la base y al muro solidario con ella.

Definiendo D_n por la relación

$$c_n = 2m_n D_n \Omega_n \quad (8.6)$$

la ec. 8.5 queda en la forma

$$\ddot{u}_n + D_n \Omega_n \dot{u}_n + \Omega_n^2 u_n = - \ddot{s}(t) \quad (8.7)$$

La solución de régimen permanente de la ec. 8.7 para la excitación armónica

$$\ddot{s}(t) = e^{i\omega t} \quad (8.8)$$

es

$$u_n(t) = \frac{-e^{i\omega t}}{\Omega_n^2 - \omega^2 + 2iD_n\Omega_n\omega} \quad (8.9)$$

La amplitud compleja del empuje sobre el muro es entonces

$$H_n = \frac{m_n}{1-r_n^2 + 2iD_n r_n} \quad (8.10a)$$

para el modelo (a), y

$$H_n = \frac{m_n(1+2i D_n r_n)}{1-r_n^2 + 2 i D_n r_n} \quad (8.10b)$$

para el modelo (b), con

$$r_n = \frac{\omega}{\Omega_n}$$

Comparando las expresiones de H_n con la ec. 7.28 se concluye que para que uno cualquiera de los dos modelos de parámetros concentrados fuera una representación exacta del correspondiente modo del modelo continuo, sería necesario que se tuviera

$$H_n = F_n \quad (8.11)$$

lo que es imposible, porque, como ya se dijo, F_n es función trascendente de r_n , mientras que H_n es función racional.

Queda tan solo un parámetro por determinar: el amortiguamiento D_n . Como no hay manera de cumplir 8.11 para toda r_n , se exigirá, en lugar de esa ecuación imposible, la siguiente

$$\max |H_n| = \max |F_n| \quad (8.12)$$

Esta condición permite, en cada uno de los casos (a) y (b), determinar D_n como función de ζ . El resultado aparece en la Tabla 5.

Debe observarse, en primer lugar, que en ambos modelos D_n resulta independiente de n ; es decir el amortiguamiento de cualquiera de los dos modelos (a) o (b) es el mismo para todos los modos del modelo continuo, aunque diferente para el caso (a) que para el caso (b). Por consiguiente se escribirá D en lugar de D_n , omitiendo el índice. En segundo lugar, para ambos modelos D es apreciablemente mayor que ζ , sobre to-

do si ζ es pequeño. Finalmente, los valores de D para uno y otro modelo difieren poco entre sí para valores de ζ de hasta 5%, y aun para valores mayores la diferencia no es muy grande.

Para el rango de valores de ζ estudiado ($0.01 < \zeta < 0.20$), D se puede representar con aproximación razonable por las expresiones

$$D = 0.8 \sqrt{\zeta(1-\zeta)} \quad (8.13a)$$

para el modelo (a), y

$$D = 0.8 \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \quad (8.13b)$$

para el modelo (b).

Las gráficas de $|H_n|$ son muy parecidas para los dos modelos (Fig 9). La diferencia está en las relaciones de fase. El modelo (a) exagera el defase entre el empuje y la excitación, tomando como criterio de comparación el modelo continuo aquí postulado. Para el modelo (a), puede variar entre 0 y 180°; mientras que para el modelo (b) varía entre 0 y 90°, lo que está más de acuerdo con los resultados de Fig 6 para el modelo continuo. En vista de estas observaciones se adoptará el modelo (b).

Como se puede concluir comparando las gráficas de $|H_n|$ y $|F_n|$, la del módulo de la respuesta de frecuencia del modelo de parámetros concentrados tiene una punta notoriamente más ancha que la correspondiente al modelo continuo. Esta observación permite concluir que el modelo de parámetros concentrados dará empujes por exceso, ya que muestrea el espectro de la excitación en un ancho de banda bastante mayor, sobre todo si ζ es pequeño.

9. PARED RIGIDA QUE PUEDE GIRAR EN TORNO DE SU BASE

El modelo de parámetros concentrados desarrollado en el capítulo anterior es aplicable cuando la pared está fija en la base. Se necesita modificarlo, si se quiere tener en cuenta la posibilidad de que el muro gire.

Considérese un relleno seminfinito de espesor uniforme H , sin roce interno, soldado a una base fija, horizontal y rígida, y sostenido por una pared plana vertical y rígida a la cual se le impone un movimiento armónico de rotación en torno de su base, como se indica en la Fig 10. Bastará resolver este problema para poder determinar los elementos que es preciso agregar al modelo de manera que los efectos de la rotación del muro queden incluidos. Se ha juzgado que para una estimación preliminar de esos elementos no es necesario considerar el amortiguamiento interno del relleno.

Sea

$$\theta(t) = \theta_0 e^{i\omega t} \quad (9.1)$$

la rotación impuesta al muro. El movimiento del relleno quedará regido por la ecuación diferencial

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} + \beta^2 u_{yy} \quad (9.2)$$

con las condiciones de borde

$$u(x,0,t) = 0 \quad (9.3)$$

$$u_y(x,H,t) = 0 \quad (9.4)$$

$$u(0,y,t) = \theta_0 y e^{i\omega t} \quad (9.5)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u(x,y,t) = 0 \quad (9.6)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_x(x,y,t) = 0 \quad (9.7)$$

Las dos últimas condiciones anotadas expresan que tanto los desplazamientos como las presiones tienden a cero lejos de la pared.

Para resolver el problema, consideraremos su extensión par en x , imponiendo la condición

$$u(x,y,t) = u(-x, y,t) \quad (9.8)$$

La función

$$u(x,y,t) = \theta_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \phi_n(y) g_n(x) \quad (9.9)$$

donde $\phi_n(y)$ es la función definida en ec. 6.6, satisface las condiciones de borde 9.3 y 9.4 en la base y en la superficie libre. Para que cumpla, además, la ecuación diferencial 9.2 es preciso que las funciones $g_n(x)$ satisfagan la ecuación diferencial ordinaria

$$\frac{d^2 g_n}{dx^2} - \frac{\Omega_n^2 - \omega^2}{\alpha^2} g_n = 0 \quad (n=1,2,3\dots) \quad (9.10)$$

donde Ω_n está dado por

$$\Omega_n = \frac{(2n-1) \pi \beta}{2H}$$

Sean

$$v_n = \sqrt{\Omega_n^2 - \omega^2}, \quad |\omega| < \Omega_n \quad (9.11)$$

y

$$v'_n = \sqrt{\omega^2 - \Omega_n^2}, \quad |\omega| > \Omega_n \quad (9.12)$$

Entonces, la solución par en x de la ec. 9.10 es

$$g_n(x) = \begin{cases} A_n e^{-\frac{v_n |x|}{\alpha}}, & |\omega| < \Omega_n \\ A_n \cos \frac{v'_n x}{\alpha}, & |\omega| > \Omega_n \end{cases} \quad (9.13)$$

donde los A_n ($n = 1, 2, \dots$) son coeficientes por determinar.

La condición de borde sobre la pared (ec. 9.5) exige que se tenga

$$y = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \operatorname{sen} \frac{(2n-1) \pi y}{2H} \quad (9.14)$$

Esta relación permite determinar los A_n . Un cálculo elemental da

$$A_n = \frac{8H(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2 \pi^2} \quad (9.15)$$

y, por consiguiente,

$$u(x,y,t) = \theta_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \Phi_n(y) \left\{ U(\Omega_n - |\omega|) e^{-\frac{v_n |x|}{\alpha}} + U(|\omega| - \Omega_n) \cos \frac{v'_n x}{\alpha} \right\}$$

donde $U(\cdot)$ es la función unidad de Heaviside.

La presión sobre la pared es

$$\begin{aligned} p &= -\rho \alpha^2 u_x(0,y,t) \\ &= \rho \alpha \theta_0 e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} A_n v_n U(v_n - |\omega|) \Phi_n(y) \end{aligned} \quad (9.16)$$

Integrando sobre toda la altura se obtiene el empuje total

$$P = \int_0^H p dy = \frac{8H\alpha\beta\gamma\theta_0}{\pi^2 g} e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(2n-1)^2} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}} U(\Omega_n - |\omega|) \quad (9.17)$$

Análogamente, el momento de volteo de las presiones respecto de la base es

$$M = \int_0^H p y dy = \frac{16H^2\alpha\beta\gamma\theta_0}{\pi^3 g} e^{i\omega t} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^3} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_n^2}} U(\Omega_n - |\omega|) \quad (9.18)$$

Limitando los desarrollos en serie de ecs. 9.17-18 a su primer término, se tiene, aproximadamente

$$P \approx \frac{8H\alpha\beta\gamma\theta_0}{\pi^2 g} e^{i\omega t} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}} \cdot U(\Omega_1 - |\omega|) \quad (9.17a)$$

$$M \approx \frac{16H^2\alpha\beta\gamma\theta_0}{\pi^3 g} e^{i\omega t} \sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}} U(\Omega_1 - |\omega|) \quad (9.18a)$$

De la ecuación 9.16 se infiere que la rotación del muro influye sobre las presiones correspondientes al enésimo modo del relleno solamente para frecuencias de la rotación inferiores a la del modo. Al limitar los desarrollos en serie de P y de M a su primer término, se están despreciando las contribuciones al empuje y al momento de volteo de las frecuencias de giro superiores a Ω_1 , lo cual es lícito como aproximación a menos que el muro sea muy alto o el relleno muy blando y que la excitación sísmica contenga frecuencias muy altas.

La función $\left[1 - \omega^2/\Omega_1^2\right]^{1/2}$ se puede aproximar por un polinomio de segundo grado en el intervalo $-\Omega_1 < \omega < \Omega_1$. Se elegirá una aproximación de la forma

$$\sqrt{1 - \omega^2/\Omega_1^2} = 1 - \frac{b\omega^2}{\Omega_1^2} \quad (9.19)$$

Esta elección respeta las propiedades del sistema para frecuencia nula (estática).

Haciendo mínima la integral

$$I = \int_{-\Omega_1}^{\Omega_1} \left[\sqrt{1 - \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}} - \left(1 - b \frac{\omega^2}{\Omega_1^2}\right) \right]^2 d\omega \quad (9.20)$$

se encuentra que el mejor valor de b , en el sentido de los mínimos cuadrados, es

$$b = 5 \left(\frac{1}{3} - \frac{\pi}{16} \right) \approx 0.6849 \quad (9.21)$$

El error máximo cometido al sustituir $\sqrt{1 - \omega^2/\Omega_1^2}$ por $1 - b\omega^2/\Omega_1^2$ (con el valor de b de ec. 9.21) es de 7% en el intervalo $0 < \omega < 0.9 \Omega_1$.

El momento de volteo debido a las presiones del relleno se puede aproximar entonces por

$$M \approx \frac{16H^2 \alpha \beta \gamma \theta_0 e^{i t}}{\pi^3 g} \left(1 - \frac{b\omega^2}{\Omega_1^2}\right) U(\Omega_1 - |\omega|)$$

Este momento, y el empuje P correspondiente, se pueden reproducir introduciendo en la base del muro un resorte de rigidez al giro k_0 en paralelo con el que se utilice para representar la rigidez de la cimentación a la rotación, y una masa puntual m_0 adherida al muro a la distancia $\frac{2H}{\pi}$ de la base. Un cálculo simple da para k_0 y m_0 las expresiones

$$k_0 = \frac{16H^2 \alpha \beta \gamma}{\pi^3 g} \approx 0.516 \frac{H^2 \alpha \beta \gamma}{g} \quad (9.22)$$

$$m_0 = \frac{16bH^2 \alpha \gamma}{\pi^3 \beta g} \approx 0.315 \frac{H^2 \alpha \gamma}{\beta g} \quad (9.23)$$

Obsérvese que (véase ec. 8.2)

$$m_0 = b m_1 \quad (9.24)$$

El modelo completo para el caso de pared rígida que puede girar en torno de la base se ha representado en la Fig 11 considerando un solo modo del relleno. Las ecuaciones del movimiento para el caso de excitación sísmica son las siguientes

$$\begin{aligned}
 m_1 \ddot{u}_1 &= -k_1 \left(u_1 - \frac{2H\theta}{\pi} \right) - c_1 \left(\dot{u}_1 - \frac{2H\dot{\theta}}{\pi} \right) - m_1 \ddot{s}(t) \\
 \left(I + \frac{4H^2}{\pi^2} m_0 \right) \ddot{\theta} &= \frac{2H}{\pi} \left\{ k_1 \left(u_1 - \frac{2H\theta}{\pi} \right) + c_1 \left(\dot{u}_1 - \frac{2H\dot{\theta}}{\pi} \right) \right\} \\
 &\quad - (K_\theta + k_0) \theta - C_\theta \dot{\theta} - \left(m_0 \cdot \frac{2H}{\pi} + \frac{W}{g} H \right) \ddot{s}(t)
 \end{aligned} \tag{9.25}$$

donde los símbolos empleados tienen los siguientes significados:

u_1 = desplazamiento relativo de la masa del oscilador representativo del primer modo del relleno, respecto de la base, positivo cuando está dirigido en el sentido positivo del eje 0x

θ = rotación del muro, positiva cuando está dirigida hacia el relleno

m_1 = masa del oscilador que representa al primer modo del relleno (ec. 8.2, con $n=1$)

k_1 = rigidez del resorte del oscilador que representa al primer modo del relleno (ec. 8.3, con $n=1$)

c_1 = constante de amortiguamiento del oscilador que representa el primer modo del relleno = $2D\sqrt{m_1 k_1}$

D = amortiguamiento del oscilador que representa el primer modo del relleno, expresado como fracción del crítico. Se le puede estimar empleando la ec. 8.13b:

$$D = 0.8 \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}}, \text{ donde}$$

ζ = amortiguamiento específico del relleno

H = altura del muro (espesor del relleno)

\bar{H} = altura del centro de masas del muro sobre la base

$\frac{W}{g}$ = masa del muro

I = momento de inercia de masas del muro respecto de un eje horizontal perpendicular al dibujo y que pasa por el centro de la base.

m_0 = masa puntual adherida al muro a la altura $\frac{2H}{\pi}$ por encima de la base (ec 9.23)

K_θ = rigidez de la cimentación del muro a la rotación

k_0 = rigidez de rotación ficticia (ec. 9.22)

C_θ = constante de amortiguamiento de la cimentación para la rotación

$\ddot{s}(t)$ = aceleración horizontal del terreno en la base del muro, positiva cuando está dirigida en el sentido positivo del eje Ox.

Las masa, rigidez y constantes de amortiguamiento se entiende que se refieren a la unidad de largo de muro.

10. RECOMENDACIONES PARA EL ANALISIS

10.1 Selección del método de análisis. El primer paso que es necesario dar para evaluar las presiones de tierra sobre una estructura de contención bajo condiciones sísmicas es el de seleccionar el método apropiado de análisis. Esta selección esta condicionada por la magnitud de los desplazamientos y deformaciones que la estructura experimenta bajo la acción sísmica.

Para tener una estimación previa de los desplazamientos y deformaciones máximos que es dable esperar, se recomienda aplicar a la estructura fuerzas horizontales estáticas como las evaluadas en el capítulo 6 del presente trabajo. Este cálculo preliminar no tiene más objeto que seleccionar el método de análisis.

En el capítulo 6 se dan fórmulas y gráficas para la presión de tierras, empuje total y momento de volteo debidos a un campo uniforme de fuerzas de cuerpo, de intensidad \underline{a} , independientes del tiempo. Al aplicar esos resultados para estimar los desplazamientos máximos que servirán de base a la selección del método de análisis se recomienda sustituir \underline{a} por la ordenada del espectro de aceleraciones absolutas de un oscilador lineal con amortiguamiento viscoso D , expresado como fracción del crítico, evaluada para el periodo T_1 , con

$$D = 0.8 \sqrt{\frac{\zeta}{1-\zeta}} \quad (10.1)$$

y

$$T_1 = \frac{4H}{V_s} \quad (10.2)$$

donde H es la altura del muro, V_s la velocidad de propagación de ondas de cortante en el relleno y ζ el amortiguamiento específico del relleno, expresado como fracción del crítico.

Las fórmulas del capítulo 6 valen para una pared rígida fija y un relleno elástico representable por el modelo simplificado introducido en el capítulo 3, aunque esta última limitación no es importante dado el buen acuerdo obtenido entre dicho modelo y la teoría elástica clásica. Se puede admitir entonces que la recomendación enunciada anteriormente dará una estimación preliminar conservadora de los desplazamientos máximos, utilizable para el solo efecto de seleccionar el método de análisis.

Sea Δ_m el desplazamiento máximo de la estructura calculado en la forma recién recomendada. Si se cumple la condición

$$\Delta_m < (\Delta_A)_i \quad (10.3)$$

donde $(\Delta_A)_i$ está dado por (véase ec. 1.12)

$$(\Delta_A)_i = \frac{8}{\pi} (1-\nu) (K_o - K_A) \frac{gH^2}{V_s^2} \quad (10.4)$$

se puede admitir que el comportamiento sísmico del relleno será esencialmente elástico y se analizará el problema en tal hipótesis, ya sea aplicando los resultados obtenidos en el presente trabajo (capítulos 6-9) o bien los encontrados por Wood (43).

Si se viola la condición 10.3, se aplicará el método de Mononobe-Okabe, o alguna de sus modificaciones, o bien el de Richards y Elms. La elección entre estas dos posibilidades se hará atendiendo a la magnitud de los desplazamientos laterales que puede admitir la estructura sin que se afecte su seguridad o el cumplimiento de su función.

10.2 Estructuras con deformaciones y desplazamientos pequeños. Cuando se cumple la condición 10.3 la presión total de tierras (estática + sísmica) se calculará tomando para la presión estática el valor de la presión en reposo. La presión sísmica se determinará según lo expuesto en los capítulos 8 y 9, respectivamente, según que la pared esté fija en su base o pueda girar en torno de ella, aplicando los métodos del análisis modal.

Esta manera de estimar las presiones sísmicas no es aplicable cuando parte apreciable del desplazamiento Δ_m sea debido a deformaciones propias de la pared, como es el caso de muros de tablestacas. Casos típicos en que cumplida la condición 10.3, se puede aplicar el procedimiento descrito son los de muros de sótanos de edificios fundados sobre terreno firme, paredes verticales de canalizaciones o de tanques subterráneos, muros de gravedad de concreto en masa, muros de concreto reforzado con contrafuertes.

10.3 Estructuras sin limitación de desplazamientos. Cuando se cumpla la condición

$$\Delta_m > (\Delta_A)_f = \frac{27}{16} (\Delta_A)_i \quad (10.5)$$

y, además, no exista motivo para limitar los desplazamientos por razones basadas en la función de la estructura, se empleará el método de Mononobe-Okabe debidamente corregido para tener en cuenta que la sobrepresión dinámica no es hidrostática. En este tipo de análisis debe incluirse el efecto de las fuerzas de inercia sobre el muro mismo, especialmente si la estructura es masiva (muros de gravedad).

Cuando es posible que se produzca falla local en la pared propiamente tal, como es el caso de la falla por flexión en el fuste de un muro de concreto reforzado en voladizo, o en las losas de la pared de un muro con contrafuertes, estas partes de la estructura deben verificarse para las sollicitaciones inducidas por las presiones dinámicas calculadas como si los desplazamientos fueran pequeños, más las presiones estáticas. Para esta verificación, las presiones estáticas que deben agregarse a las dinámicas serán las del estado activo.

10.4 Estructuras con desplazamientos limitados. Sea Δ_{ad} el desplazamiento máximo que se puede admitir por motivos basados en la función de la estructura. Se pueden presentar tres casos

- I) $\Delta_{ad} < (\Delta_A)_i$
- II) $\Delta_{ad} > (\Delta_A)_f$
- III) $(\Delta_A)_i < \Delta_{ad} < (\Delta_A)_f$

En el primero es aplicable lo dicho para estructuras con desplazamientos pequeños. En el segundo, se aplicará el método de Richards y Elms:

En el tercer caso es dudoso que se pueda emplear el método de Richards y Elms, porque el nivel de desplazamientos es tal que no se ha desarrollado el estado activo en un volumen significativo del relleno. Se sugiere en ese caso analizar la estructura para la presión en reposo más la sobre-presión dinámica del método de Richards y Elms.

Es aplicable lo dicho anteriormente respecto de los casos de estructuras con partes sensibles a sobrepresiones que pueden producirse durante el sismo antes de alcanzarse el estado límite de las teorías de Mononobe-Okabe y de Richards y Elms. Estas presiones dinámicas pueden ser bastante mayores que las predichas por las teorías mencionadas para el estado límite. Se las puede estimar, como ya se ha dicho, suponiendo válida la teoría elástica y se las deberá incluir en la revisión de las partes sensibles de la estructura (flexión en losas de concreto reforzado de la pared de un muro con contrafuertes, o en el fuste de un muro de concreto reforzado en voladizo). Obviamente, cuando se aplica el método de Richards y Elms para la verificación de la estabilidad global (deslizamiento, volcamiento, falla de la cimentación) las sobrepresiones a que se ha aludido no entran en el análisis ni es necesario tenerlas en cuenta, como tampoco en la determinación del peso del muro necesario para controlar los desplazamientos globales de la estructura.

11. LIMITACIONES DE LOS METODOS DE ANALISIS

11.1 Limitaciones del análisis elástico. Los modelos que representan el relleno como un sólido elástico lineal y homogéneo tienen algunas limitaciones importantes que conviene señalar. En primer lugar, los suelos no se comportan linealmente, aun para deformaciones pequeñas. En el caso de cortante puro, por ejemplo, la curva carga-deformación bajo condiciones cuasiestáticas y carga monótonamente creciente, se aparta notoriamente de una línea recta, y ello sucede para cargas bastante inferiores a las que profucen la falla por cortante. Si la carga no es monótona, la rama de descarga no coincide con la de carga y el material exhibe un comportamiento histerético, es decir ya no sólo el comportamiento es no-li-

neal, sino que, además, tampoco es elástico.

La disipación de energía por histeresis se puede representar por un amortiguamiento viscoso "equivalente" sólo de manera aproximada. El valor de ese amortiguamiento viscoso supuestamente equivalente depende de la forma y amplitud de la excitación y, en el caso de determinarlo experimentalmente, depende también del diseño experimental empleado, aunque no muy críticamente.

Las experiencias de laboratorio han mostrado que los coeficientes "elásticos" de los suelos dependen significativamente de la presión confinante efectiva. En la teoría de elasticidad, si se analizan los tensores de deformación y de esfuerzos en sus respectivos componentes deviatorio y no deviatorio, hay una relación directa entre el componente deviatorio de los esfuerzos y el componente deviatorio de las deformaciones, sin que en esa relación intervengan los componentes no deviatorios. En cambio, lo que la experiencia muestra para los suelos es que el componente deviatorio de la deformación depende no sólo del componente deviatorio de los esfuerzos, sino también del componente no deviatorio. Ha sido corriente tener en cuenta este tipo de comportamiento mediante el artificio de suponer que el módulo de cortante (módulo de rigidez) empleado en el cálculo es función de la presión confinante (aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la presión confinante efectiva). Como en el caso de un relleno, la presión confinante efectiva es proporcional a la profundidad bajo la superficie, el efecto de acoplamiento entre la parte no deviatoria del tensor de esfuerzos y la parte deviatoria del tensor de deformaciones se ha tratado de tener en consideración admitiendo que el módulo de rigidez es proporcional a la raíz cuadrada de la profundidad, con lo cual el problema se lineariza, ya que se sustituye un módulo elástico que es función del nivel de esfuerzos por otro que es función de la posición. Hasta donde sabemos, no se ha examinado la licitud de esta sustitución.

Otra fuente de series dificultades en el análisis elástico lineal es

la que proviene de las no linealidades provocadas por el hecho de que en el contacto entre relleno y pared se puede producir el despegue. Aparentemente, el no considerar este tipo de efectos conduce a resultados del lado de la seguridad en lo que se refiere al empuje dinámico y al momento de volteo dinámico, pero no podemos estar seguros de que siempre sea así.

Finalmente, otras limitaciones de las soluciones elásticas disponibles están relacionadas con el hecho de que algunos problemas tridimensionales (estribos de puente, muros de longitud finita) se analizan como si fueran bidimensionales. Además, la mayor parte de las soluciones publicadas se refieren a rellenos de superficie horizontal libre de cargas; poco se ha hecho para analizar los casos de rellenos con superficie inclinada o sobre los cuales actúan cargas externas. Estas limitaciones no son inherentes al método de análisis; con algún trabajo adicional, los problemas mencionados también se pueden resolver dentro del marco de las teorías elásticas. Pero, por supuesto, subsisten las limitaciones de carácter más esencial que se han mencionado anteriormente y que se refieren, de una u otra manera, el carácter no lineal del problema.

11.2 Limitaciones de los análisis de Richards y Elms y de Mononobe-Okabe. En primer lugar conviene recordar que estos métodos son aplicables sólo a muros masivos rígidos con capacidad para experimentar desplazamientos de cierta importancia, no controlados, como en el caso del método de Mononobe-Okabe, o pretendidamente controlados como en el de Richards y Elms. Y decimos pretendidamente controlados porque el modelo empleado por Richards y Elms, con ser un avance importante, es todavía bastante primitivo en lo que se refiere a la estimación de los desplazamientos permanentes.

En el capítulo 2 se han expuesto con cierto detalle las objeciones principales al método de Richards y Elms; ello nos ahorra repetir las aquí. Conviene sí señalar un punto importante: si el muro puede girar en torno de su base, se produce una reducción importante del empuje y,

sobre todo, del momento de volteo. Es probable que los resultados del método de Richards y Elms queden en tal caso excesivamente del lado de la seguridad, en lo que se refiere a la estabilidad global de la estructura.

11.3 El caso de las estructuras flexibles. El análisis racional de los esfuerzos a que están sometidas estructuras de retención flexibles (como ser muros de tablestacas), aun en el caso de acciones estáticas, presente dificultades especiales. En primer lugar, la sensibilidad de la distribución de los esfuerzos (momentos flexionantes) a las hipótesis que se hagan sobre las propiedades mecánicas del relleno y sobre la forma de ligazón de la estructura, es extraordinariamente alta. Actualmente sólo disponemos de métodos relativamente confiables para analizar estados límites en condiciones estáticas.

El problema se complica adicionalmente por el hecho de que la sensibilidad de la estructura exige que no se dejen de lado consideraciones sobre la posibilidad de pérdida de contacto entre estructura y relleno.

11.4 Agua freática. Los modelos elásticos suponen que el relleno está constituido por una sola fase y, por lo tanto, no pueden tener en cuenta los efectos de la presencia de agua. Los problemas planteados cuando hay agua requieren de cambios radicales en el modelo y en los métodos de resolución. En nuestra opinión queda excluida la posibilidad de tratarlos analíticamente y resulta necesario recurrir al análisis numérico, vía método de los elementos finitos, por ejemplo, lo cual resultará justificado cuando se trate de obras de excepcional importancia y siempre que se disponga de relaciones constitutivas confiables.

11.5 Definición de la excitación sísmica. No se entrará aquí a enumerar las dificultades que tiene la definición de una excitación sísmica adecuada. Este problema es de alcance general en toda la ingeniería sísmica, pero toma particularidades especiales, en el caso de los muros de contención, porque es corriente que estas estructuras estén asociadas a

irregularidades topográficas y a cambios bruscos en las calidades de los suelos (relleno artificial versus terreno natural, por ejemplo).

CONCLUSION

La conclusión general que se puede extraer es que el análisis sísmico de estructuras de contención de tierras está recién en su infancia. Los métodos aquí expuestos apuntan hacia una solución del problema para ciertas categorías limitadas de estructuras, pero al mismo tiempo revelan un buen número de problemas por plantear y resolver que requerirán de un esfuerzo continuado de investigación durante algunos años.

REFERENCIAS

1. Jáky, J. "Die klassische Erddrucktheorie mit besonderen Rucksicht auf die Stutzwandbewegung", Abh. Int. Vereinigung fur Bruchkenbau und Hochbau, Zurich, (1938)
2. Kézdi, A. "Lateral earth pressure", cap 5 de ref 3.
3. Wu, T.H. "Retaining walls", cap 12 de ref 3.
4. Winterkorn, H.F. y Fang, H-Y (eds) Foundation engineering handbook, Van Nostrand Reinhold Co., (1975)
5. Rankine, W.J.M. "On the stability of loose earth", Phil. Trans. Roy. Soc., vol 147, (1857)
6. Terzaghi, K "Old earth-pressure theories and new test results". Publicado originalmente en 1920; reproducido en From theory to practice, Wiley, N.York, (1960).
7. Terzaghi, K "Large retaining wall tests", Pts. I-V, Engineering News Record, v. 112, p. 136, 259, 316, 403, 503, (1934)
8. Rowe, P.W. y Peaker, K. "Passive earth pressure measurements" Géotechnique, 15, No 1, 57-78, (1965).
9. Roscoe, K.H. "The influence of strains in soil mechanics" Géotechnique, 20, no 2, 129-170, (1970).
10. James, R.G. y Bransby, P.L. "Experimental and Theoretical investigations of a passive earth pressure problem", Geotéchnique, 20, no 1, 17-37, (1970).
11. Arias, A. "Un problema de elasticidad con aplicación en mecánica de suelos" Instituto de Ingeniería, UNAM (en preparación)
12. Coulomb, C.A. "Essai sur une application des règles de maximis et minimis à quelques problèmes de statique relatifs à l'architecture" Mémoires de Mathématiques et de Physique, présentées à l'Académie Royale des Sciences par divers Savants, et lûs dans ses Assemblées, vol 7, 1773, pp 3 8-83, Paris (1776)
13. Heyman, J. Coulomb's memoir on statics. An essay in the history of civil engineering, Cambridge University Press, (1972).
14. Cauchy, A.L. "Recherches sur l'équilibre et le mouvement intérieur des corps solides ou fluides, élastiques ou non élastiques", Bull. Soc. Philomath., Paris, 9-13, (1823).

15. Lévy, M. "Sur une théorie rationnelle de l'équilibre des terres fraîchement remués et ses applications au calcul de la stabilité des murs de soutènement", Journal de Mathématiques, 18, 241 (1873) (Comptes Rendus, Acad. Sci, 68, 1456 (1869)).

16. Airy, G.B. Brit. Assoc. Advan. Sci. Rept. (1862), y Phil. Trans. Roy. Soc., vol 153 (1863), p. 49

17. Saint-Venant, B. de, "Rapport fait à l'Académie des Sciences sur un Mémoire de M. Maurice Lévy...", Journal de Mathématiques, 2a. serie, 15, 237 (1870). "Sur une détermination rationnelle, par approximation, de la pousée qu'exercent des terres dépourvues de cohésion, contre un mur ayant une inclinaison quelconque", Journal de Mathématiques, 2a serie 15, 250 (1870). (Comptes Rendus, Acad. Scie, 70, 229-35, 281-6 (1870)).

18. Boussinesq, J. Essai théorique sur l'équilibre d'élasticité des massifs pulvérulents et sur la pousée des terres sans cohésion, Paris (1876).

19. Boussinesq, J. "Sur la détermination de l'épaisseur minimum que doit avoir un mur vertical...", Annales des Ponts et Chaussées, 3, 625 (1882).

20. Caquot, A. Équilibre des massifs a frottement interne. Stabilité des terres pulvérulents et cohérents, Paris (1934).

21. Kérisel, J. "Historique de la mécanique de sols en France jusqu'au 20^e siècle", Géotechnique, 6, 151 (1956).

22. Sokolovskij, V.V. Statics of soil media (Trad. de D.H. Jones y A.N. Schofield): Butterworths, Londres (1960).

23. Sokolovski, V.V. "Statics of granular media" Pergamon, N.York (1965).

24. Salençon, J. "Applications of the theory of plasticity in soil mechanics", (trad. de R.W. Lewis y H. Virlogeux), Wiley, (1977) original: "Théorie de la plasticité pour les applications a la mécanique des sols", Eyrolles, (1974)

25. Desai, C.S. y Christian, J.T. (eds). "Numerical methods in geotechnical engineering" McGraw-Hill (1977).

26. Clough, G.W. y Tsui, Y "Static analysis of earth retaining structures", cap 15 de ref (25).

27. Clough, G.W., "Application of the finite element method to earth-structure interaction", Proc. Conf. Appl. Finite element Method Geotech. Eng., Vicksburg, Miss. (1972).

28. Murphy, D.J.; Clough, G.W. y Woolworth, R.S. "Temporary excavation in varved clay". J. Geotech. Div. ASCE, vol 101, (marzo 1975).

29. Mononobe, N. "Algunas consideraciones sobre efectos sísmicos horizontales y verticales, y notas varias sobre vibración" Journal of JSCE, vol 10, no 5, pp. 1063-1094 (en japonés) (1924).
30. Okabe, S. "General theory of earth pressure", Journal JSCE, vol 12, no 1 (1926).
31. Mononobe, N. y Matsuo, M. "On the determination of earth pressure during earthquakes", Proc. World Engineering Congress, Vol 9 (1929)
32. Qvando, E; Sánchez-Sesma, F.J. y Arias, A. "Análisis y diseño sísmico de muros de retención" Instituto de Ingeniería, UNAM. Proyecto 9010, elaborado para la Secretaría de Asentamientos Humanos y Obras Públicas. (1979).
33. "Earthquake resistant regulations. A world list" International Association for Earthquake Engineering, Tokio, (varias ediciones).
34. Seed, H.B. y Whitman, R.V. "Design of earth retaining structures for dynamic loads", ASCE Specialty Conference, Lateral stresses in the ground and the design of earth-retaining structures, Cornell University (1970).
35. Ichihara, M. y Matsuzawa, H. "Earth pressure during earthquake", Soils and Foundations, vol 13, no 4, pp 75-86 (1973).
36. Ichihara, M.; Mori, N.; Nakane, S. e Hirano, I "Passive earth pressure coefficient during earthquake", Memoirs of the Faculty of Engineering, Nagoya University, vol 25, no 2, pp 129-179. (1973).
37. Jakovlev, P.I. "Coefficients of active and passive pressure on retaining walls under seismic conditions", Proc. 6th World Conf. on Earthquake Engineering, vol III, pp 2356-2362, Nueva Delhi (1973).
38. Nandakumaran, P. "Behaviour of retaining walls during earthquakes", en Earthquake Engineering, Jai Krishna 60th Anniversary Volume, A. Arya (ed), Indian Soc. of Earthq. Techn., Sarita Prakashan, India (1975).
39. Arya, A.S. y Gupta, Y.P. "Dynamic earth pressure on retaining walls due to ground excitations" Bull. Indian Soc. Earthq. Techn., vol 3, no 2 (1966).
40. Kapila, I.P. "Earthquake resistant design of retaining walls" Proc. Second Symp. Earthq. Engrg., University of Roorkee, Roorkee, India (1962).
41. Nandakumaran, P. y Joshi, V.H. "Static and dynamic earth pressure behind retaining walls", Bull. Indian Soc. Earthq. Techn., vol 10, no 3 (1973).
42. Prakash, S. y Basanna, B.M. "Earth pressure distribution behind

retaining wall during earthquake" Proc. 4th World Conf. Earthq. Engng., Santiago de Chile, vol 3 (1969).

43. Wood, J.H. "Earthquake-induced soil pressures on structures" Tesis doctoral, California Institute of Technology, EERL-73-05, Pasadena, California (1973)

44. Newmark, N.N. y Rosenblueth, E. Fundamentals of Earthquake Engineering, párrafo 16.4, pp 544--546. Prentice-Hall (1971).

45. Newmark, N.N. "Effects of earthquakes on dams and embankments" Géotechnique, vol 15, no 2 (1965).

46. Richards, R. y Elms, D. "Seismic behavior of gravity retaining walls" Proc. ASCE, Journal Geotech. Engng. Div., GT4 (1979).

47. Franklin, A.G. y Chang, F.K. "Earthquake resistance of earth and rockfill dams" Miscellaneous Paper S-71-17, Soils and Pavements Lab., U.S. Army Eng. Waterways Experiment Station (1977).

48. Whitman, R.V. Dynamic behavior of soils and its applications to civil engineering projects (Congreso de Mecánica de Suelos celebrado en Lima, Perú, 1980?)

49. Ikuta, Y.; Masao, M; Mitoma, T. y Naganou, M. "Record of lateral pressure taken during earthquake", Soils and Foundations, vol 19, no 4, pp 85-92 (1979).

50. Byrne, P.M. y Salgado, F. "Seismic response of retaining structures" Proc. International Conf. Recent Advances in Geotech. Earthq. Engng. and Soil Dynamics, vol II. pp 727-732, Rolla, Miss. (1981).

51. Matsuo, H. y Ohara, S. "Lateral earth pressure and stability of quay walls during earthquakes", Proc. Second World Conf. Earthq. Engng., Tokyo y Kyoto, vol 1 (1960).

52. Ishii, Y.; Arai, H. y Tsuchida, H. "Lateral earth pressure in an earthquake" Proc. Second World Conf. Earthq. Engng., Tokyo y Kyoto, vol 1 (1960).

53. Tajimi, H. "Dynamic earth pressure on basement walls in the elastic ground" Proc. Third Japan Earthq. Engng. Symp., Tokyo (1970)

54. Tajimi, H. "Dynamic earth pressure on basement wall" Proc. Fifth World Conf. Earthq. Engng., vol 2, Roma (1973)

55. Arias, A.; Sánchez-Sesma, F.J. y Ovando-Shelley, E. "A simplified elastic model for seismic analysis of earth-retaining structures with limited displacements" Proc. International Conf. on Recent Advances in Geotech. Earthq. Engng. and Soil Dynamics, vol I, pp 235-240, Rolla, Miss. (1981)

56. Scott, R.R. "Earthquake-induced earth pressure on retaining walls" Proc. Fifth World Conf. on Earthq. Engng., vol 2, Roma (1973)

57. Hadjian, A. H. "Panel on earthquake induced earth pressure: opening statement: State-of-the-art". Proc. Specialty Conf. Earthquake Engineering and Soil dynamics, Pasadena, ASCE, Vol III, pp 1429-1435 (1979).

58. Aubry, D. y Chouvet, D. "Numerical computation of dynamical earth pressures against retaining walls" Proc. Symp. Impl. Comp. Procedures and Stress-Strain Laws in Geotech. Engng. (1981).

59. Aubry, D. y Chouvet, D. "Numerical computation of earth-pressures during earthquakes" Proc. International Conf. on Recent Advances in Geotech. Engng. and Soil Dynamics, Vol II, pp 721-726, Rolla, Miss. (1981).

60. Kausel, E.A. et al. "Seismically induced sliding of massive structures" J. Geotech. Engng. Div., ASCE, 105, GT9, 1049-1066 (1979)

61. Nazarian, H.N. y Hadjian, A.H. "Earthquake induced lateral soil pressures on structures", J. Geotech. Engng. Div., ASCE, 105, GT9, 1049-1066 (1979)

62. Belytschko, T. y Mullen, R. "Mesh partitions of explicit-implicit time integration" en Formulations of computational algorithms in finite element analysis, J. Bathe et al. (eds) MIT Press (1977).

63. Hughes, T.J.R. y Liu, W.K. "Implicit-explicit finite element in transient analysis: stability theory" ASME J. Appl. Mēch (45), pp 371-374 (1978).

64. Hughes, T.J.R. y Liu, W.K. "Implicit-explicit finite element in transient analysis: implementation and numerical examples" ASME J. Appl. Mech (45), pp 375-378 (1978)

TABLA 1. COEFICIENTE DE EMPUJE EN REPOSO

Tipo de suelo	K_0	Referencia
Arena suelta, saturada	0.46	(2)
Arena densa, saturada	0.36	(2)
Arena suelta ($e=0.8$), seca	0.64	(2)
Arena densa ($e=0.6$), seca	0.49	(2)
Arena compactada	1 - 1.5	(3)
Arcilla, compactación manual	1 - 2	(3)
Arcilla, compactada a máquina	2 - 6	(3)
Arcilla sobreconsolidada	1 - 4	(3)

TABLA 2. DESPLAZAMIENTOS NECESARIOS PARA DESARROLLAR LOS ESTADOS ACTIVO Y PASIVO EN EL RELLENO
(Segun Wu, ref 4)

Relleno	Estado	Tipo de movimiento	Desplazamiento necesario Δ
No cohesivo	Activo	Traslación	0.001 H
	Activo	Rotación en torno de la base	0.001 H
	Pasivo	Traslación	0.05 H
	Pasivo	Rotación en torno de la base	> 0.1 H
Cohesivo	Activo	Traslación	0.004 H
	Activo	Rotación en torno de la base	0.004 H

Notas: H = altura de la pared

Δ = Traslación en dirección perpendicular al plano de la pared; desplazamiento del extremo superior de la pared, en el caso de rotación.

TABLA 3. COMPARACION DE RESULTADOS DEL CALCULO (26) CON LOS EXPERIMENTALES (10). PARED RUGOSA INICIALMENTE VERTICAL QUE GIRA EN TORNO DE LA BASE CONTRA UN RELLENO DE ARENA SUELTA SECA
 ($e_0 = 0.71$, $\gamma_0 = 1.5 \text{ Ton/m}^3$, $\phi = 35^\circ$)

Angulo de giro	$\frac{P_{\text{calc}}}{P_{\text{exp}}}$	$\frac{M_{\text{calc}}}{M_{\text{exp}}}$	$\left(\frac{\bar{h}}{H}\right)_{\text{cal}}$	$\left(\frac{\bar{h}}{H}\right)_{\text{exp}}$
3°	0.78	0.77	0.48	0.49
7°	0.71	0.64	0.48	0.53
13°	0.59	0.52	0.47	0.55

Notas: P = resultante de las presiones (empuje total)
 M = momento de volteo de las presiones respecto de la base
 \bar{h} = cota del punto de aplicación de P sobre la base
 H = altura de la pared.

TABLA 4. COMPARACION DE LOS MODULOS MAXIMOS DE LA RESPUESTA DE FRECUENCIA DEL RELLENO Y DE UN OSCILADOR CON AMORTIGUAMIENTO VISCOZO PARA IGUAL VALOR DE ζ

ζ	$ F_n _{\text{max}}$	$\frac{1}{2\zeta\sqrt{1-\zeta^2}}$
0.01	6.15	50.00
0.05	2.91	10.01
0.10	2.14	5.03
0.20	1.64	2.55

TABLA 5. VALORES DE D_n EN FUNCION DE ζ

ζ	D_n	
	Modelo (a)	Modelo (b)
0.01	0.0816	0.0827
0.05	0.175	0.186
0.10	0.241	0.272
0.20	0.322	0.407

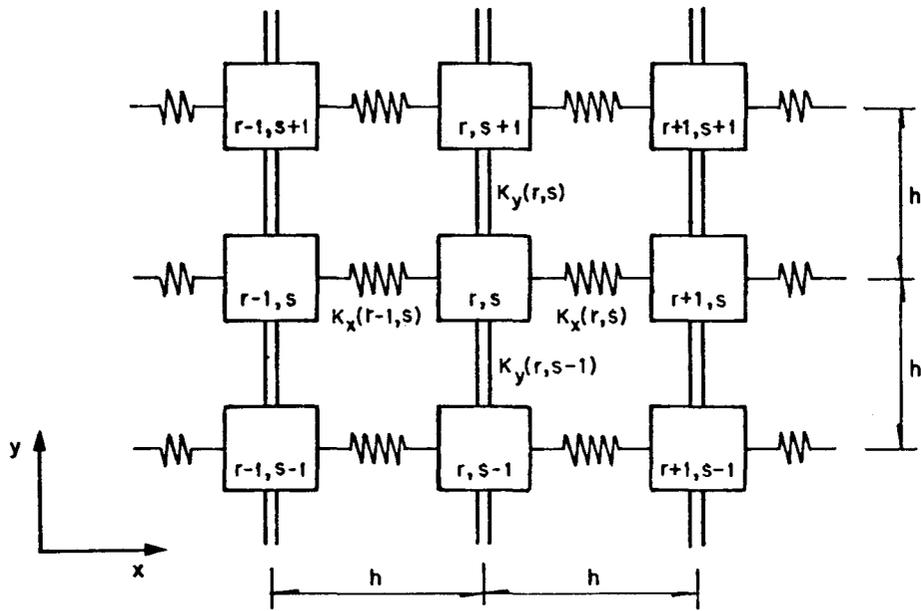
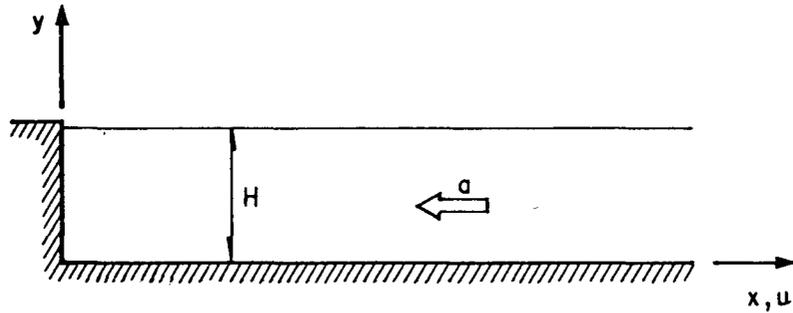
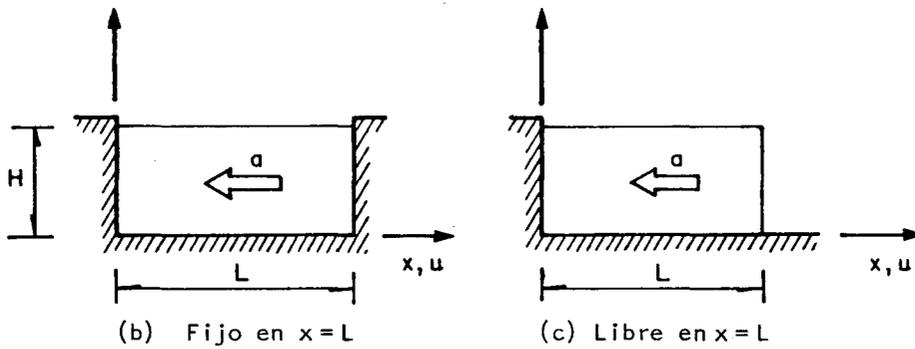


Fig 1. Modelo elástico simplificado



(a) Muro rígido y relleno horizontal de longitud infinita con fuerza de cuerpo uniforme $X = -\rho a$



(b) Fijo en $x=L$

(c) Libre en $x=L$

Fig 2. Muro rígido en $x=0$ y relleno de longitud finita

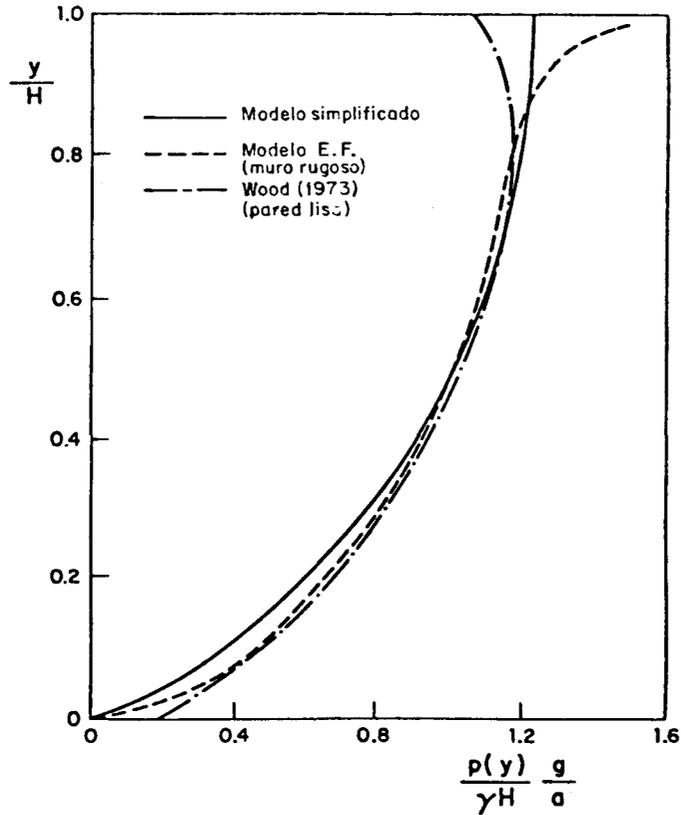


Fig 3. Distribución de presiones sobre una pared rígida. Fuerza de cuerpo horizontal sobre el relleno con $L/H=5$, $\nu = 0.3$. Comparación con solución de la elasticidad clásica

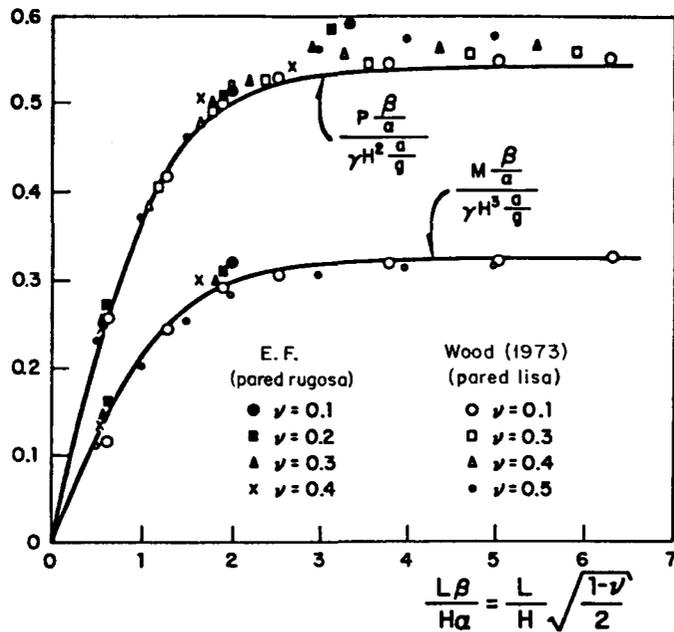


Fig 4. Empujes y momentos de volteo sobre una pared rígida. Comparación con resultados basados en la teoría elástica clásica

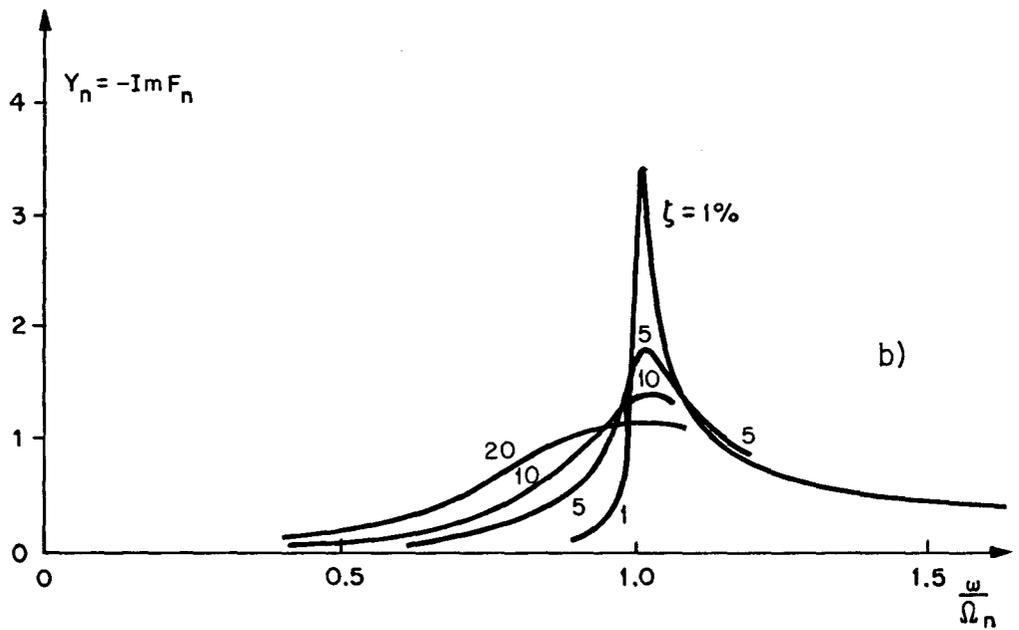
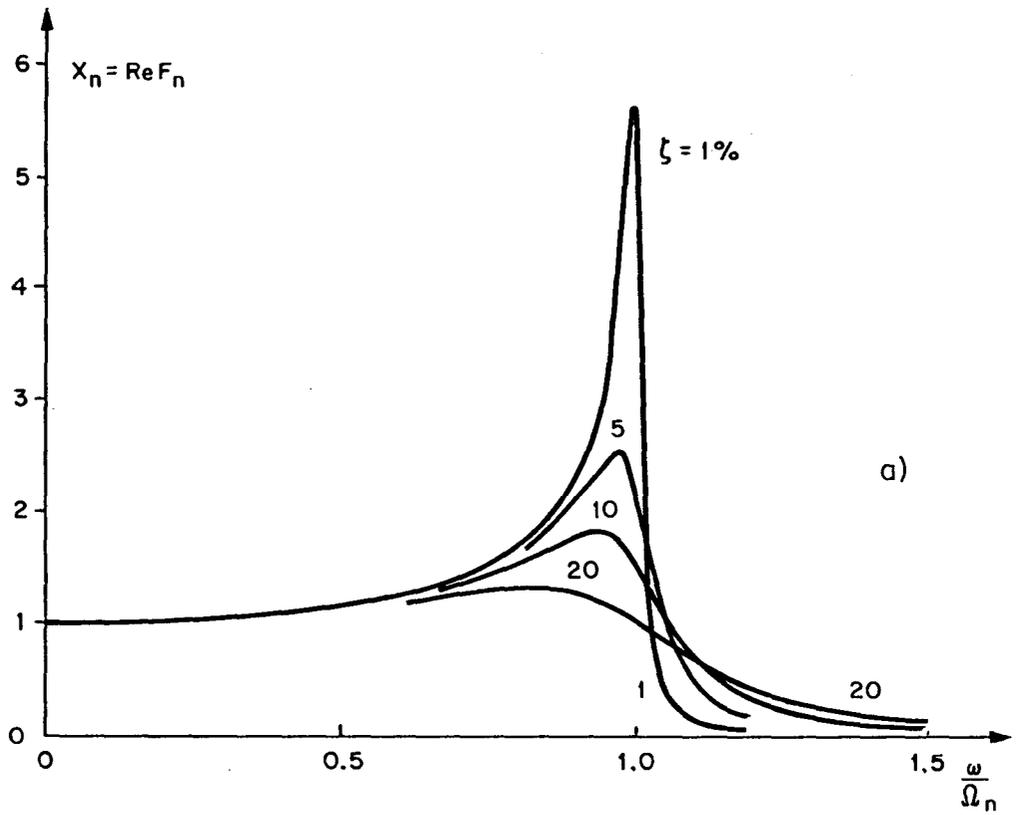


Fig 5. Respuesta de frecuencia del relleno: $F_n = X_n - iY_n$

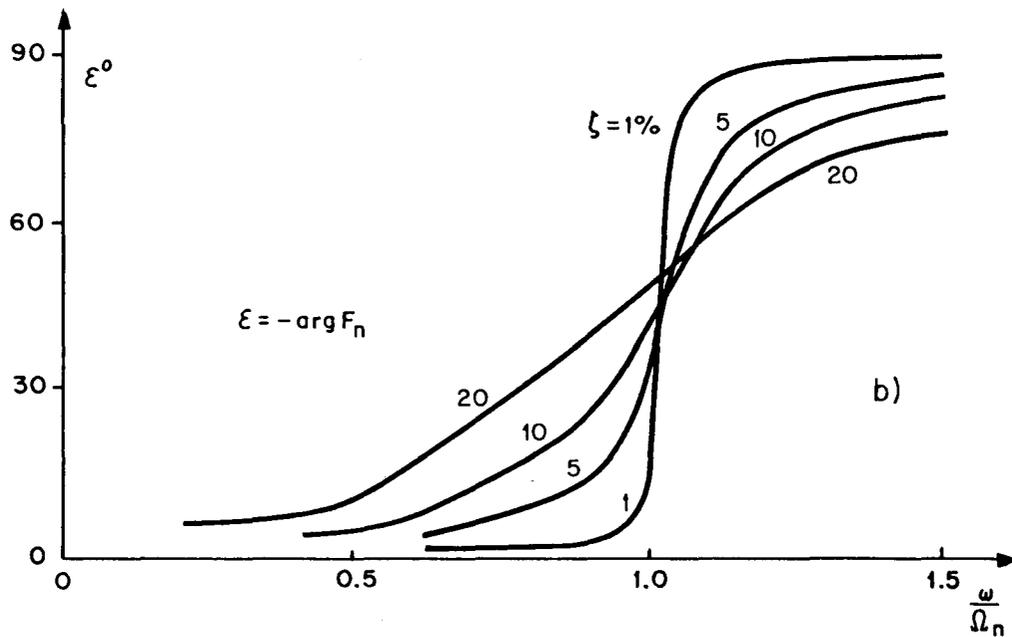
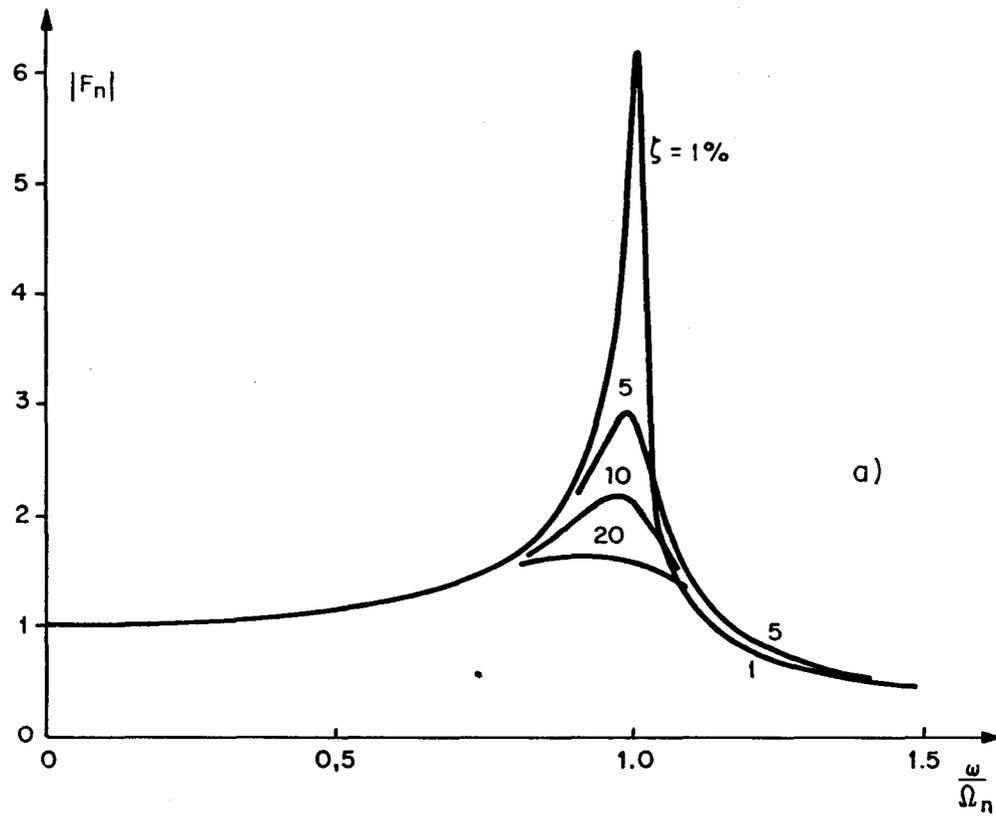


Fig 6. Respuesta de frecuencia del relleno: módulo y fase

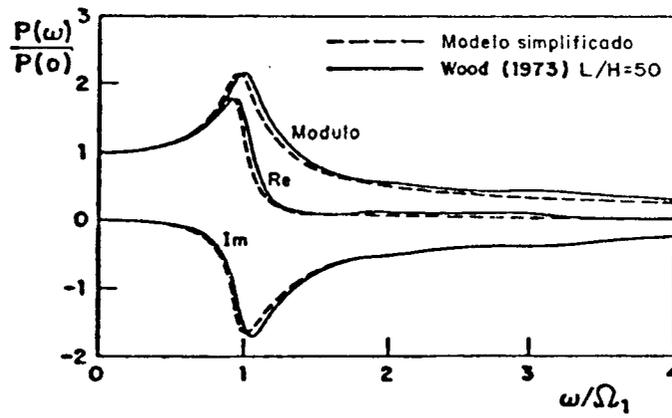


Fig 7. Respuesta de frecuencia para el empuje normalizado. Comparación con resultados de Wood

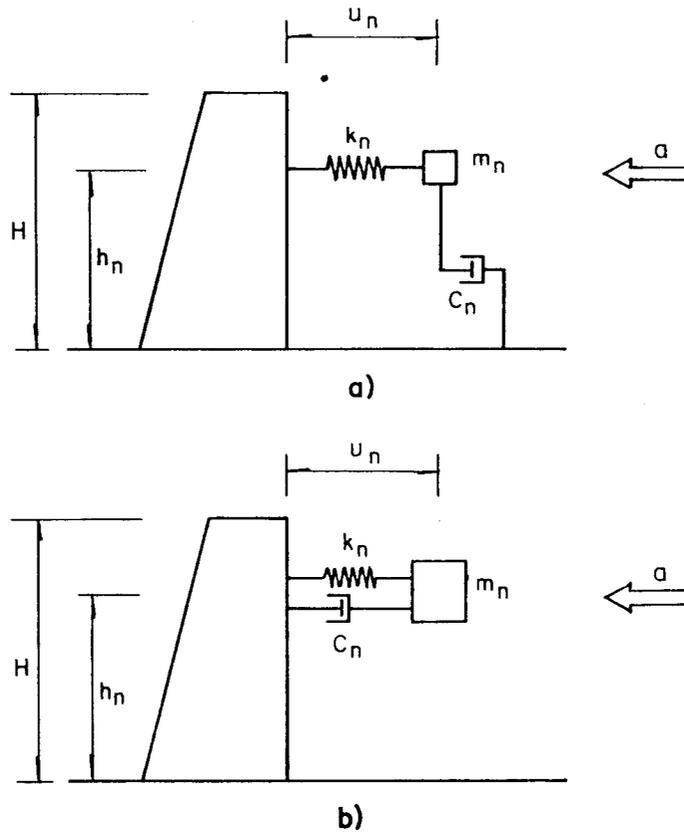


Fig 8. Modelos de parámetros concentrados del relleno para una pared rígida fija

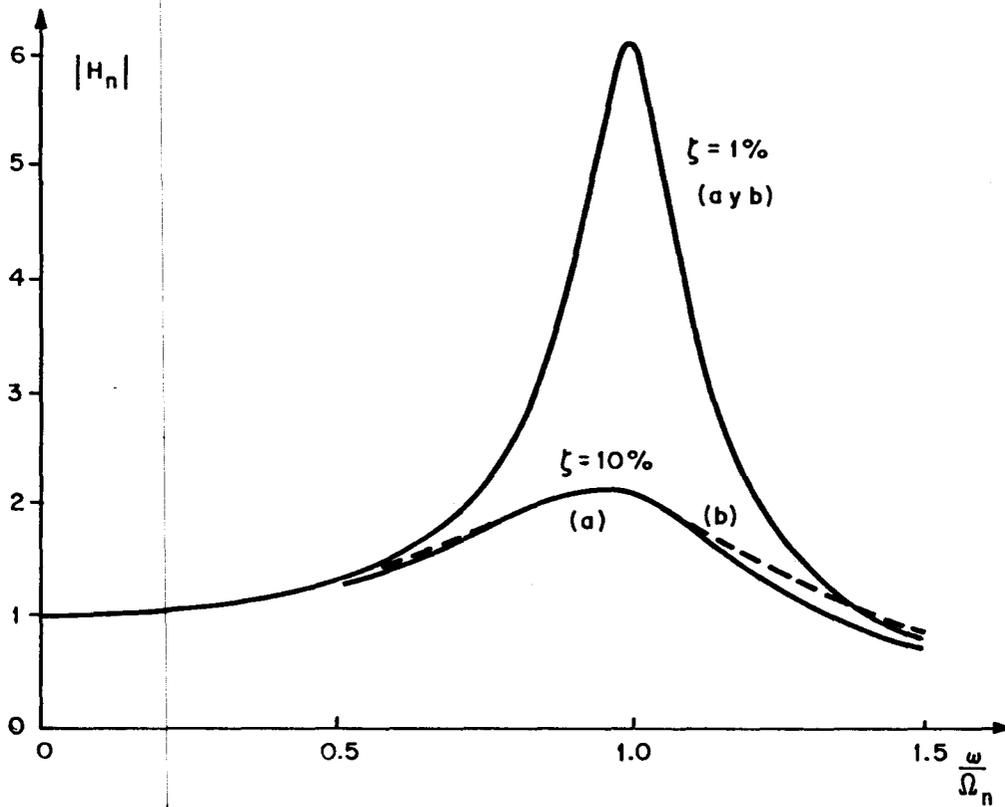


Fig 9. Módulo de la respuesta de frecuencia de los modelos (a) y (b)

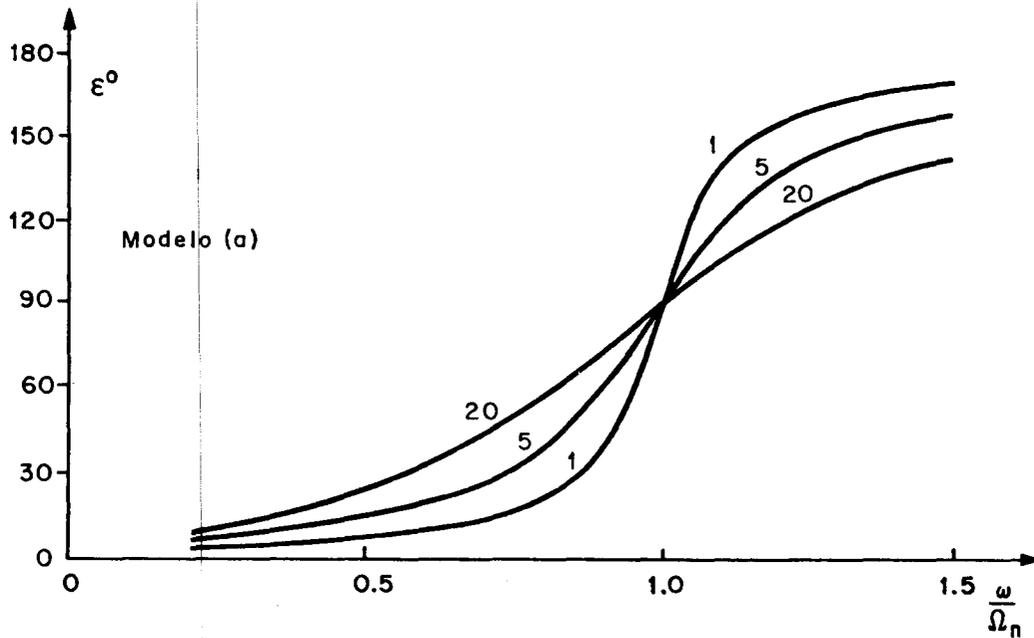


Fig 10. Fase de respuesta de frecuencia. Modelo (a)

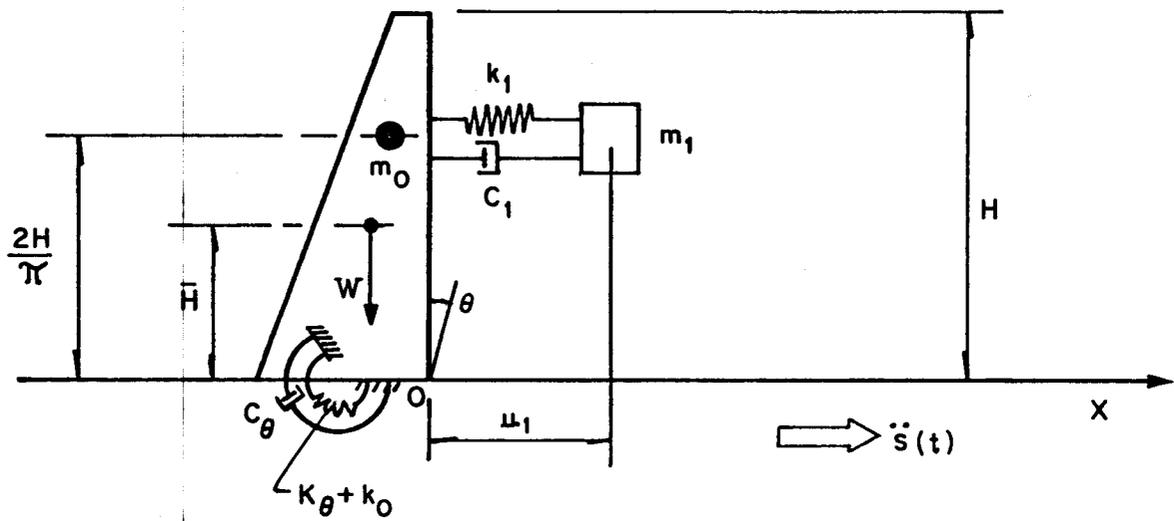


Fig 11. Modelo de parámetros concentrados para una pared rígida que puede girar en torno del eje de su base