

# VIBRACIÓN ALEATORIA NO LINEAL DE EDIFICIOS AISLADOS EN LA BASE CON CONTROL ACTIVO

*Jorge E Hurtado<sup>1</sup> y Alex H Barbat<sup>2</sup>*

## RESUMEN

En este trabajo se presenta un nuevo procedimiento de aplicación del método de linealización estocástica equivalente para el análisis de vibraciones aleatorias de estructuras no lineales. El método se caracteriza por el uso de funciones de densidad mixtas en lugar de la densidad gaussiana como en el método convencional, lo que permite obtener una mayor exactitud en la predicción de la matriz de covarianza. El método se aplica luego al estudio del comportamiento de estructuras aisladas en la base con o sin control activo adicional ante excitación sísmica, modelada de forma estocástica. Los modelos estructurales son pórticos no lineales apoyados en soportes elastoméricos histeréticos. La excitación sísmica se ha modelado como una densidad espectral evolutiva, obtenida a partir de la respuesta a un ruido blanco gaussiano de dos filtros en cascada caracterizados por parámetros variables en el tiempo, con lo cual se obtiene una excitación no estacionaria tanto en amplitud como en frecuencia. Los parámetros de la excitación han sido calculados a partir de algunos sismos intensos. Los resultados muestran una alta sensibilidad tanto de la respuesta como de las fuerzas de control ante la naturaleza no estacionaria en frecuencia de la excitación, en particular cuando ésta presenta energías sustanciales en la fase correspondiente a las ondas de superficie, que suelen ser de largo período. Ello se debe al fuerte comportamiento no lineal del apoyo y a las bajas frecuencias naturales que éste impone a la estructura.

## ABSTRACT

A new procedure for implementing the method of equivalent stochastic linearization used for random vibration analyses of non linear structures is presented. The main feature of the procedure is that mixed probability density functions are used instead of the gaussian ones, as it is done in the conventional equivalent linearization method. It is shown that a better precision of the estimation of the covariance matrix of the structural response is thus obtained. The method is then applied to the analysis of the behavior of base isolated structures with or without supplementary active control under random seismic excitation. The structural models are non linear frames supported by lead rubber bearings which exhibit an hysteretic behavior. The seismic action has been modelled as an evolutionary spectral density obtained as the response of time-variant linear filters to a gaussian white noise, so that the resulting excitation shows a non stationary character in both amplitude and frequency. The parameters of the excitation have been obtained from some strong earthquake records. The results of the study show a great sensitivity of the structural responses and control force to the details of the excitation, specially when this contains substantial energy contents in the form of long-period surface waves. This is due to the non linear behavior of the bearings and to the low natural frequency imposed to the structure by the isolation system.

---

<sup>1</sup> *Universidad Nacional de Colombia*

<sup>2</sup> *Universidad Politécnica de Cataluña*

## 1. INTRODUCCIÓN

Uno de los enfoques más adecuados para el análisis de estructuras sometidas a terremotos es el que considera tanto la excitación como la respuesta como procesos estocásticos o aleatorios, debido al alto grado de incertidumbre que gobierna la excitación sísmica. Para el caso en que la estructura se comporta de manera lineal la teoría de vibraciones aleatorias proporciona métodos suficientemente establecidos y aceptados que permiten estimar cantidades tales como los momentos centrales, la densidad espectral o los valores máximos de la respuesta, así como la probabilidad de fallo del sistema, sin necesidad de recurrir a la técnica más exacta, pero computacionalmente más costosa de simulación de Monte Carlo.

En el caso de estructuras con comportamiento no lineal, solamente en los últimos años se han desarrollado técnicas que permiten calcular algunos de estos valores. Una de tales técnicas es el método de linealización estocástica equivalente (Roberts y Spanos, 1990) que posibilita la estimación de la matriz de covarianza de la respuesta del sistema ante cargas modeladas como ruido blanco filtrado tanto en régimen estacionario como no estacionario. Por otra parte, en los años recientes ha tenido lugar una amplia labor de investigación tendiente a incorporar la teoría de control, ampliamente utilizada en diversas ramas de la ingeniería mecánica, al campo de las estructuras civiles, con el objetivo de reducir las vibraciones causadas por cargas ambientales como los vientos o los terremotos, por medio de la aplicación de fuerzas contrarias al movimiento de la estructura calculadas con algoritmos de control en tiempo real (Soong, 1990; Stengel, 1990). Asimismo se ha registrado un importante avance de las técnicas de aislamiento de la base de las estructuras por medio de dispositivos elastoméricos, de fricción y otros, que permiten una reducción drástica de los desplazamientos de la estructuras. La aplicación de estas técnicas pasivas junto con las de control activo se conoce con el nombre de *control híbrido*.

En este trabajo se presenta un procedimiento para estimar la respuesta estocástica de estructuras no lineales que representa una mejor correlación con los resultados de simulación

de Monte Carlo que el método convencional de linealización estocástica equivalente. El procedimiento se aplica luego al caso de estructuras aisladas en la base con o sin control híbrido, excitadas por sismos modelados como procesos no estacionarios en amplitud y frecuencia.

## 2. MÉTODO PROPUESTO DE LINEALIZACIÓN ESTOCÁSTICA

Para el análisis de vibraciones aleatorias de estructuras no lineales, uno de los métodos que mayor aceptación han recibido en los últimos años es de la linealización estocástica equivalente. Desde sus desarrollos iniciales el mayor impulso para su aplicación práctica se dió a partir de la demostración por (Atalik y Utku, 1976) de la simplificación matemática que se obtiene al considerar que la respuesta tiene un comportamiento gaussiano. En el caso de sistemas hysteréticos, sin embargo, se ha podido comprobar que esta hipótesis conduce a una subestimación de la varianza de los desplazamientos de respuesta, que puede ser hasta del 40 por ciento, dependiendo del grado de plastificación del sistema.

En diferentes ramas de la ingeniería mecánica, y en particular en el análisis de vibraciones aleatorias, uno de los modelos de histéresis más utilizados es el ideado por (Bouc, 1967) y extendido por (Wen, 1980), que describe el comportamiento hysterético de manera endocrónica por medio de una ecuación diferencial, lo que permite obtener las matrices de linealización de manera explícita. Este modelo ha sido usado con éxito para simular el comportamiento de apoyos elastoméricos no lineales para el aislamiento en la base de estructuras (Constantinou y Tadjbaksh, 1985). En él, la fuerza de restitución de un sistema sencillo está dada por

$$f(d, v, z) = rkd + (1-r)kz \quad (1)$$

donde  $d$  es el desplazamiento,  $v$  es la velocidad y  $z$  es una función no lineal con unidades de desplazamiento gobernada por la siguiente ecuación diferencial:

$$\dot{z} = Av - b|v||z|^{n-1}z - gv|z|^n \quad (2)$$

En estas ecuaciones  $r$ ,  $A$ ,  $b$ ,  $g$  y  $n$  son parámetros que controlan la rigidez, la resistencia y el endurecimiento del sistema. Al reemplazar la ecuación (1) en la ecuación del movimiento

$$ma+cv+f(d,v,z)=q(t) \quad (3)$$

donde  $m$  es la masa y  $c$  el amortiguamiento viscoso, se obtiene una ecuación lineal regida por la ecuación no lineal de la variable  $z$ . En el método de linealización estocástica se propone sustituir esta última ecuación por una equivalente lineal

$$\dot{z}=s'd+c'v+k'z \quad (4)$$

y estimar sus parámetros por medio de la minimización del cuadrado de la diferencia entre ambas. Esto da como resultado que el vector de coeficientes  $[s', c', k']$  es

$$c^T=[s', c', k']=E\{\dot{z}y^T\}S^{-1} \quad (5)$$

donde  $y^T$  es el vector de estado  $[u, v, z]$  y  $S$  su matriz de covarianza. Si se asume un comportamiento Gaussiano del vector de respuesta  $y$ , el cálculo del vector de coeficientes se reduce a

$$c^T=E\{\nabla\dot{z}\} \quad (6)$$

Un teorema demostrado por Faravelli, Casciatti y Singh (1988) demuestra que la distribución Gaussiana es la única para la cual es posible esta simplificación. Para el caso del modelo endocrónico considerado, esto conduce a que los coeficientes de linealización están dados por

$$\begin{aligned} s' &= 0 \\ c' &= A-bF_1-gF_2 \\ k' &= -bF_3-gF_4 \end{aligned} \quad (7)$$

donde las  $F_i$  denotan funciones de las varianzas y covarianzas de las variables  $v$  y  $z$ , cuyas largas expresiones pueden encontrarse, v.g., en (Casciatti y Faravelli, 1990).

Como se ha mencionado anteriormente, la mayor deficiencia de este método reside en la

subestimación de la respuesta de desplazamiento  $d$  al compararlo con los resultados de simulación de Monte Carlo. Este error conduce a infravalorar la probabilidad de fallo de la estructura si la condición de fallo está dada por la superación de un desplazamiento límite, como es justamente el caso de estructuras aisladas en la base, en las cuales la estabilidad global de la construcción depende del desplazamiento que tenga lugar allí. Por esta razón es de gran importancia la estimación correcta de este valor. Aunque se han desarrollado varios métodos que pretenden corregir esta anomalía, su aplicación es, o bien compleja y costosa en términos de cómputo, o bien restringida a casos particulares (Pradlwarter y Schüeller, 1991). El método que se propone a continuación tiene la ventaja de ser tanto de carácter general como igualmente eficiente que el método convencional, pero más exacto que éste.

En el fondo, la razón de la deficiencia mencionada del método convencional de linealización estocástica se debe a que éste asume un comportamiento gaussiano para todas las variables, lo cual se aproxima a la realidad para el caso del desplazamiento y la velocidad, pero es claramente incorrecto para la variable  $z$ , la cual por su naturaleza histerética se encuentra acotada en el rango  $[-z_u, z_u]$ , donde  $z_u$  es su valor máximo. Esta restricción sugiere el uso una función de densidad mixta que combine las funciones de Gauss y Dirac para la variable  $z$ :

$$p_1(z)=(1-2B)\varphi_1(z)+B\delta(z-z_u)+B\delta(z+z_u) \quad (8)$$

donde  $B$  es un coeficiente de peso que depende del grado de no linealidad alcanzado por el sistema y que en el caso no estacionario es función del tiempo. Las distribuciones de orden mayor en las que no está involucrada la variable  $z$  pueden considerarse gaussianas, mientras que para el caso contrario estarán dadas por expresiones similares a la ecuación (10). Por ejemplo, la densidad que rige el comportamiento conjunto de las variables  $v$  y  $z$  es

$$\begin{aligned} p_2(v,z) &= (1-2B)\varphi_2(v,z)+B\varphi_1(v)\delta(z-z_u)+ \\ &+ B\varphi_1(v)\delta(z+z_u) \end{aligned} \quad (9)$$

Es evidente que en esta formulación se aprovechan las ventajas matemáticas de las funciones de Gauss y Dirac. Así mismo la linealidad de las distribuciones mixtas permite mantener el importante resultado logrado para la hipótesis gaussiana, dados por la ecuación (6). De esta manera, los nuevos coeficientes de linealización serán

$$c^T = [s_e, c_e, k_e] = (1-2B)[s', c', k'] + 2B[s'', c'', k'']S^{-1} \quad (10)$$

con

$$\begin{aligned} s'' &= \sigma_{dv}(A - gz_u^n) \\ c'' &= \sigma_v^2(A - gz_u^n) \\ k'' &= -\sigma_v b z_u^{n+1} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \end{aligned} \quad (11)$$

Debe observarse que esta ecuación se obtiene directamente de la ecuación general (5), de manera que al sustituir en ella las densidades (8) y (9) resulta posible aplicar la simplificación propia de la densidad gaussiana (ecuación 6) a la parte correspondiente de las expresiones resultantes, mientras la parte controlada por las funciones de Dirac debe ser calculada utilizando la expresión original de los coeficientes (5).

Se ensayaron múltiples alternativas de las expresiones del coeficiente de peso  $B$  con el fin de escoger la que se ajustase mejor a los resultados de simulación por Monte Carlo. La expresión seleccionada está definida como la contribución a la varianza total de  $z$  de la parte de la función gaussiana correspondiente a valores fuera del rango de valores físicamente posibles:

$$B = \frac{1}{\sqrt{\pi}} G^{CI} \left( 1.5, \frac{z_u^2}{2\sigma_z^2} \right) \quad (12)$$

donde  $G^{CI}$  es la función Gama complementaria incompleta.

La figura 1 muestra la desviación estándar del desplazamiento y de la velocidad de un oscilador de Bouc - Wen sometido a un sismo modelado como un filtro de Kanai-Tajimi

modulado por una envolvente de Shinozuka - Sato. Las respuestas han sido calculadas por los métodos convencional y propuesto y se comparan con los resultados obtenidos aplicando el método de Monte Carlo. Puede verse que el nuevo procedimiento predice mejor la respuesta esperada que el método tradicional en ambos casos. En lo que sigue solamente se hace uso exclusivo del segundo de ellos.

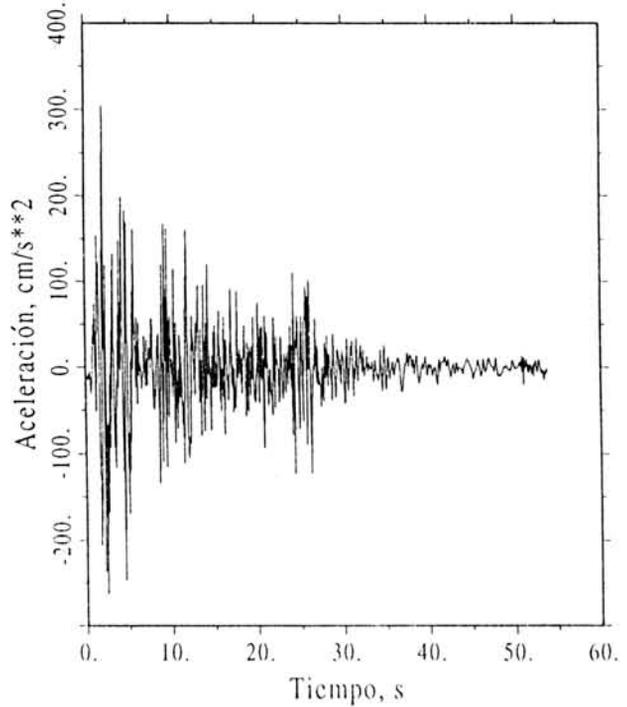


Fig 1 Acelerograma del sismo de El Centro, usado para el modelo evolutivo

### 3. CONTROL HÍBRIDO ESTOCÁSTICO

Para el caso de una estructura de  $n$  grados de libertad no lineales regidos por el modelo de Bouc - Wen, con matrices de masa  $M$ , amortiguamiento viscoso  $C$  y rigidez  $K$ , la ecuación de movimiento es

$$Ma + Cv + Kd + Hz = q \quad (13)$$

en la cual  $q$  es el vector de fuerzas externas y  $H$  es la matriz de coeficientes de la variable auxiliar  $z$ . En el caso de fuerzas sísmicas y aplicación de control activo, el vector  $q$  es

$$q = -MJ a_g + Du \quad (14)$$

donde  $J$  y  $D$  son vectores de posición de las fuerzas respectivas,  $u$  es el vector de  $r$ -fuerzas de control y  $a_g$  es la aceleración del suelo. La ecuación de movimiento puede ser representada en espacio de estado como

$$\dot{y} = Ay + N \quad (15)$$

en la que se ha incluido en el vector de estado  $y^T = [d, v, z]$  la variable auxiliar  $z$ , dada por la versión vectorial de la ecuación (4) y las matrices de estado y de excitación,  $A$  y  $N$  se ensamblan consecuentemente.

En el presente trabajo se ha considerado de gran importancia el tener en cuenta, además del carácter no estacionario en amplitudes, la no estacionaridad en frecuencia de la excitación sísmica, la cual conlleva la variación de las frecuencias dominantes del sismo con la duración. En algunos casos, como en el clásico del sismo de El Centro (figura 2) los pulsos

de frecuencias bajas y altas se encuentran situados de manera aleatoria a lo largo del eje del tiempo, mientras que en otros, como el del sismo de San Fernando (figura 3), se aprecia claramente una evolución de las frecuencias desde valores altos a bajos a lo largo del evento. Si bien en casos como éste las mayores aceleraciones corresponden a pulsos de alta frecuencia, la energía asociada a los pulsos de ondas superficiales tardías de baja frecuencia no es despreciable y, en estructuras de largo periodo fundamental como las aisladas en la base, se pueden esperar efectos nocivos de tales ondas. Por esta razón, la modelación de la excitación sísmica que se ha adoptado es la de (Wen y Yeh, 1989) en la que  $a_g$  se toma como la respuesta de filtros en cascada de Kanai - Tajimi o Clough - Penzien con parámetros que varían con el tiempo de acuerdo a una función de modulación de frecuencia calculada a partir de registros. Para este análisis se han utilizado las funciones de modulación estimadas a partir de los dos registros mencionados por medio de la técnica de mínimos cuadrados sobre polinomios de Legendre. La ecuación de movimiento en espacio de estado se amplía para incluir las ecuaciones de la dinámica de los filtros. La dinámica de la matriz de covarianza está dada por la ecuación de tipo Lyapunov

$$\dot{S} = AS + SA^T + W \quad (16)$$

en la cual  $W$  es una matriz cuyo único elemento no nulo en el caso plano equivale a la intensidad del ruido blanco modulado (o ruido de

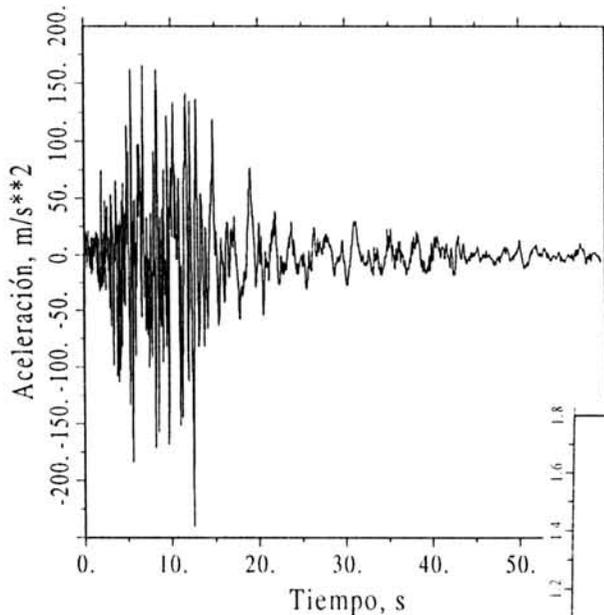


Fig 2 Acelerograma del sismo de San Fernando (idem)

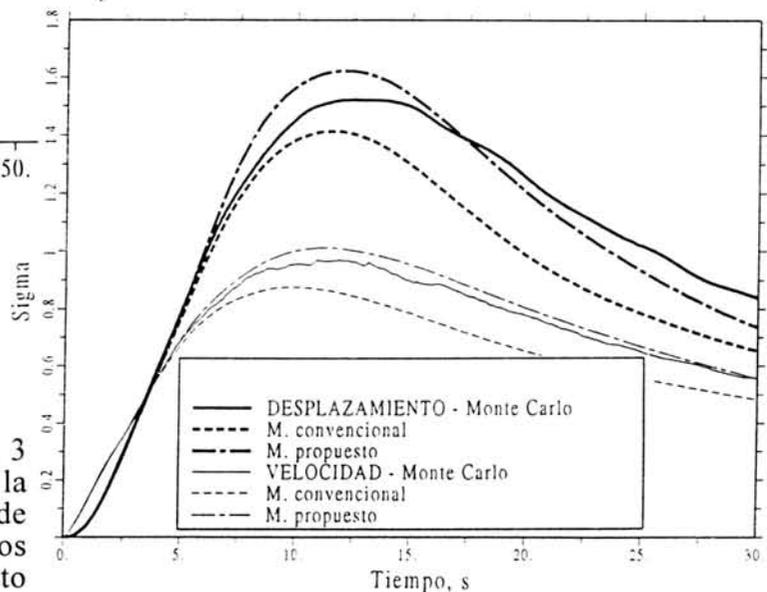


Fig 3 Desviaciones del desplazamiento y la velocidad de un sistema sencillo de Bouc-Wen por los algoritmos convencional y propuesto

disparos) que excita el sistema compuesto de filtros y estructura.

Finalmente, en el caso de incorporación de control activo, se ha adoptado la estrategia de control óptimo (Stengel, 1990), en la que el vector de fuerzas de control está dado por

$$u = -0.5 RB^T Py_u \quad (17)$$

donde  $y_u$  es idéntico al vector de estado  $y$  con exclusión de la respuesta  $z$ ,  $B$  es una matriz de dimensiones  $(2n+4, r)$  en el que todos sus elementos son nulos, excepto en las posiciones  $n+1$  a  $2n$  ocupadas por el producto  $M^1D$ , y  $P$  es la solución de la matriz algebraica de Riccati

$$A_u^T P + PA_u - 0.5 PBR^{-1}B^T P + 2Q = 0 \quad (18)$$

En estas ecuaciones,  $R$  y  $Q$  son matrices de los pesos relativos asignados a la fuerza de control y al vector de estado. Por su parte, la matriz  $A_u$  es la matriz correspondiente de estado linealizada en las condiciones iniciales del sistema y modificada para incluir el efecto del control, a la manera propuesta por Yang *et al* (1994). Se ha escogido esta estrategia justamente para indicar el riesgo de saturación de la fuerza de control debido a su proporcionalidad con el vector de desplazamientos, tal como se verá más adelante, así como la necesidad de poner en práctica otro tipo de estrategias que establezcan una mayor independencia entre ambos términos.

En todos los casos la acción sísmica se modeló como un filtro de Clough - Penzien con parámetros que se ajustan a condiciones de suelo intermedias y con las funciones de modulación de frecuencias ya mencionadas. En lo que respecta a la función de modulación de amplitudes, éstas han sido escogidas de tal manera que representen dos situaciones, a saber, sismos de duración efectiva corta y larga.

En las figuras 4 y 5 se compara el efecto de la modulación de frecuencia sobre el desplazamiento de la base y la fuerza de control en el sismo de corta duración efectiva. Se observa que el efecto de la variación del contenido frecuencial es débil en ambas

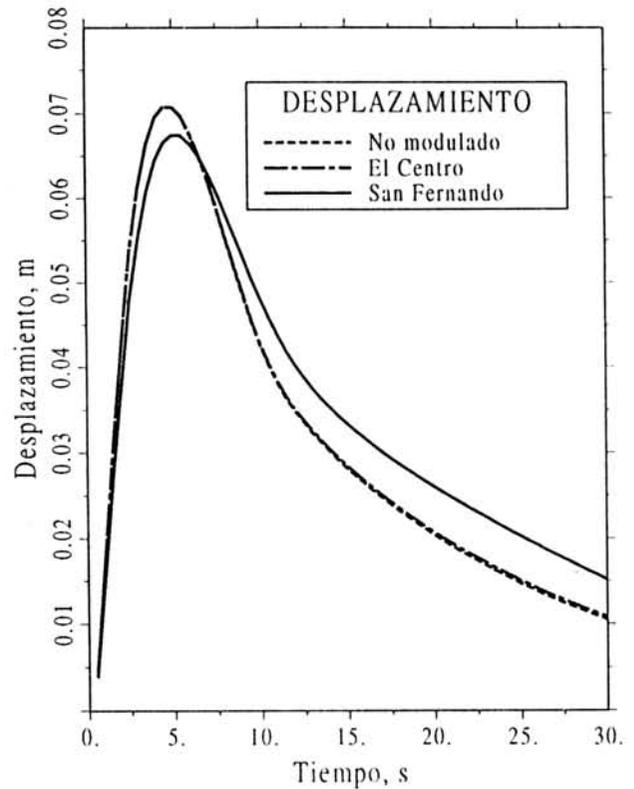


Fig 4 Sismo corto. Desplazamiento de la base

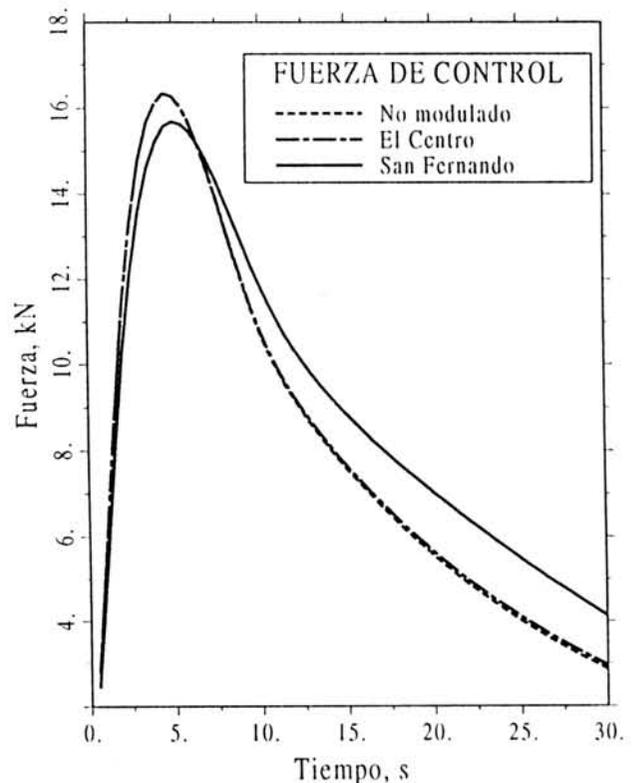


Fig 5 Sismo corto. Fuerza de control

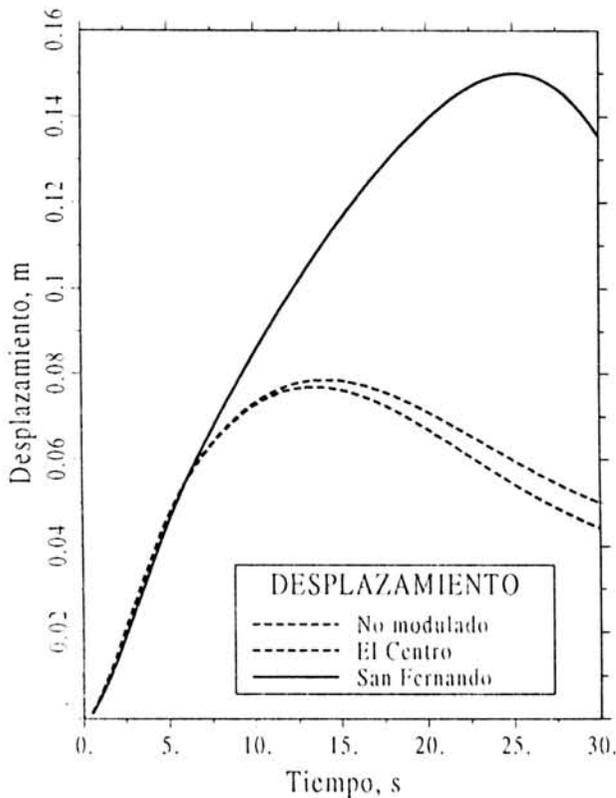


Fig 6 Sismo largo. Desplazamiento de la base

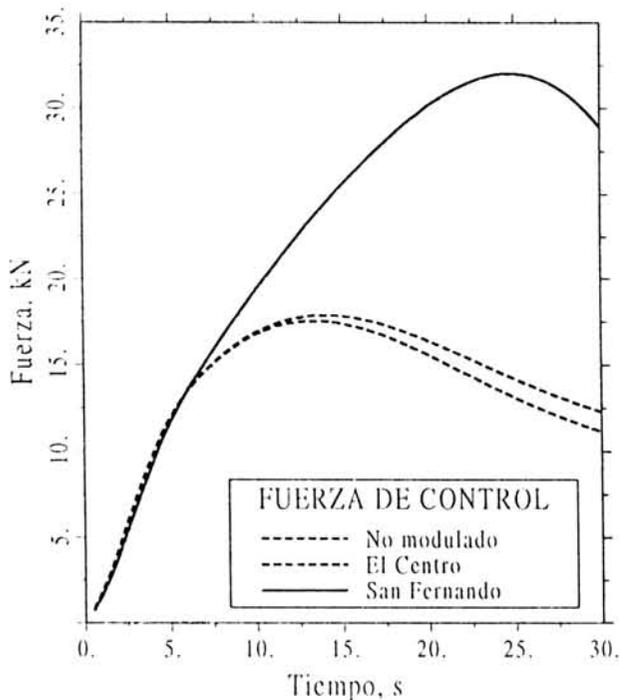


Fig 7 Sismo largo. Fuerza de control

respuestas. Por el contrario, como muestran las figuras 6 y 7, en el caso de sismos de larga duración efectiva, si bien la función de modulación de frecuencia del sismo de El Centro sólo produce un leve incremento en los desplazamientos y el control con respecto al análisis convencional que considera únicamente la modulación de amplitudes, no ocurre lo mismo con la correspondiente al sismo de San Fernando, para la cual dicho efecto es muy grande (del orden de 90% en este caso), lo que no puede ser ignorado en el diseño de este tipo de sistemas. Un efecto del todo similar se observó en el caso de edificios aislados en la base sin control activo auxiliar. Puede observarse, además, que los valores máximos de respuesta son iguales en ambos casos de duración efectiva, si se ignora la modulación frecuencial. Esto indica que la modulación no estacionaria solamente en amplitudes no es suficiente para detectar los efectos de los detalles de la excitación sísmica en estructuras no lineales.

La razón del notable incremento de las respuestas es la presencia de pulsos de largo período en los instantes medios y finales de la acción, los cuales, si bien no determinan los valores máximos de medidas sísmicas de uso corriente, tales como el espectro de respuesta de aceleración, sí pueden decidir la respuesta de estructuras en las que su no linealidad se encuentra concentrada en unos pocos grados de libertad, como es el caso de estructuras con aislamiento en la base pasivo o activo.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un método de linealización estocástica que permite estimar con mayor precisión la evolución de la covarianza de la respuesta dinámica de estructuras no lineales modeladas con el sistema endocrónico de Bouc-Wen. En el presente caso se ha aplicado el método para el estudio de la respuesta de edificios aislados en la base con apoyos elastoméricos auxiliados por fuerzas de control activo. Se ha podido demostrar que existe una gran sensibilidad de los desplazamientos del sistema de aislamiento a las ondas superficiales de baja frecuencia, de suerte que resultan incrementados fuertemente si tales ondas tienen una energía significativa. Si, por otra parte, las

fuerzas de control se calculan bajo la estrategia de control óptimo, su valor resultará igualmente afectado por tales ondas y se correrá un riesgo de saturación del controlador en tales casos. Por esa razón se hace necesaria una estrategia de control en la que las fuerzas activas no dependan de manera lineal de tales desplazamientos.

## REFERENCIAS

- Atalik, T.S. y Utku, S.T. (1976) - "Stochastic linearization of multi-degree of freedom non-linear systems", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 4, 411-420.
- Bouc, R. (1967) - "Forced vibration of mechanical systems with hysteresis" (Abstract), en: *Proceedings of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation*, Praga, Checoslovaquia.
- Faravelli, L., Casciatti, F. y Singh, M.P. (1989) - "Stochastic Equivalent Linearization Techniques and their Applicability to Hysteretic Systems", *Meccanica*, Vol. 23, 107-112.
- Casciatti, F. y Faravelli, L. (1990) - *Fragility Analysis of Complex Structural Systems*. Research Studies Press Ltd., Taunton, England.
- Constantinou, M.C. y Tadjbaksh, I.G. (1985) - "Hysteretic dampers in base isolation: random approach", *Journal of Structural Engineering*, Vol. 111, 705-721.
- Pradlwarter, H.J. y Schüeller, G.I. (1991) - "The method of statistical equivalent linearization", en: *Structural Dynamics - Recent Advances*, Springer - Verlag, Berlin.
- Roberts, J.B. y Spanos, P.D. (1990) - *Random Vibration and Statistical Linearization*. John Wiley and Sons, Chichester, U.K.
- Soong, T.T. (1990) - *Active Structural Control: Theory and Practice*. Longman Scientific & Technical, Harlow.
- Stengel, R.F. (1990) - *Stochastic Optimal Control*. John Wiley and Sons, New York.
- Wen, Y.K. (1980) - "Equivalent linearization for hysteretic systems under random excitation", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 47, 150-154.
- Wen, Y.K. y Yeh, C.H. (1989) - "Biaxial and torsional response of inelastic structures under random excitation", *Structural Safety*, Vol. 6, 137-152.
- Yang, J.N., Li, Z. y Vongchavalitkul, S. (1994) - "Stochastic hybrid control of hysteretic structures", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 9, 125-133.