

## PRESION HIDRODINAMICA EN PRESAS CON DEPOSITO CILINDRICO SEMICIRCULAR

Francisco J Sánchez-Sesma\*

Emilio Rosenblueth \*

### RESUMEN

En este trabajo se presentan soluciones para análisis modal de las presiones hidrodinámicas generadas por los tres componentes traslacionales de sismo longitudinal, vertical y transversal sobre la cortina de una presa que limita un depósito cilíndrico semicircular.

Se comparan los resultados con los obtenidos para sección rectangular y se encuentra una reducción sistemática en la respuesta con respecto a sección rectangular de igual área y profundidad.

Se establece que, para fines de diseño, el primer modo representa apropiadamente la respuesta para distintas excitaciones de interés práctico.

---

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

## HYDRODYNAMIC PRESSURE ON DAMS WITH SEMICIRCULAR CYLINDRIC RESERVOIR

Francisco J Sánchez-Sesma\*

Emilio Rosenblueth\*

## ABSTRACT

Solutions are presented for modal analysis of hydrodynamic pressures generated by the three translational seismic components-longitudinal, vertical, and transverse-on a dam limiting a semicircular cylindric reservoir.

Results are compared with those for rectangular cross-section. Responses are found to be systematically smaller with semicircular cross-section for a given cross-sectional area and depth.

It is concluded that, for design purposes, the fundamental mode adequately approximates the response for various excitations of practical interest.

---

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

## NOTACION

$A$	constante de integración
$A_m$	constante de integración
$c$	velocidad del sonido en el agua
$E$	empuje hidrodinámico
$E_0$	empuje hidrostático
$E_m$	empuje hidrodinámico en el modo $m$
$E_{mn}$	empuje hidrodinámico en el modo $mn$
$e$	base de los logaritmos naturales
$f$	transformada de Laplace de $\phi$
$g$	aceleración de la gravedad
$H$	profundidad; radio del cilindro
$I_\nu$	función de Bessel modificada de orden $\nu$
$J_\nu$	función de Bessel de orden $\nu$
$k$	función de $n$
$L$	ancho de sección rectangular
$\mathcal{L}(\cdot)$	transformada de Laplace de $(\cdot)$
$M$	momento hidrodinámico
$M_0$	momento de volteo hidrostático
$M_m$	momento hidrodinámico en el modo $m$
$M_{mn}$	momento hidrodinámico en el modo $mn$
$m$	entero positivo
$n$	entero positivo
$p$	presión hidrodinámica
$r$	coordenada cilíndrica radial
$S(\omega)$	espectro de aceleraciones

$S_m(t)$	función del tiempo proporcional a la respuesta en el modo m
$S_{mn}(t)$	función del tiempo proporcional a la respuesta en el modo mn
s	variable de la transformación de Laplace
T	periodo natural
t	tiempo
$u_0$	movimiento longitudinal del terreno
$v_0$	movimiento vertical del terreno
$w_0$	movimiento trasversal del terreno
X	coordenada cartesiana
Y	coordenada cartesiana
Z	coordenada cartesiana
z	coordenada cilíndrica
$\alpha$	ordenada espectral como fracción de g
$\alpha_m$	ordenada espectral del modo m como fracción de g
$\alpha_{mn}$	ordenada espectral del modo mn como fracción de g
$\gamma$	peso volumétrico del agua
$\delta(.)$	delta de Dirac
$\delta_{ij}$	delta de Kronecker
$\eta$	variable de integración; función de k y s
$\theta$	coordenada cilíndrica angular
$\lambda$	argumento de las funciones de Bessel
$\lambda_{\nu m}$	m-ésima raíz positiva de $J'_{\nu}(\lambda) = 0$
$\nu_m$	función de m
$\tau$	variable de integración
$\phi$	potencial de velocidades
$\omega$	frecuencia circular natural (rad/seg)
$\nabla^2(.)$	operador de Laplace

## PRESION HIDRODINAMICA EN PRESAS CON DEPOSITO CILINDRICO SEMICIRCULAR

Francisco J Sánchez-Sesma\*

Emilio Rosenblueth\*

## 1. INTRODUCCION

Las presiones hidrodinámicas inducidas por sismo en presas que limitan vasos cilíndricos de sección semicircular fueron calculadas por Kotsubo para movimiento del terreno paralelo al eje del vaso (1). La solución para movimiento transversal armónico fue obtenida por Werner y Sundquist (2). En el presente escrito se resumen los resultados de Kotsubo y se resuelve el problema para excitación sísmica vertical y transversal.

Se emplea análisis modal en forma que permite aplicar, por una parte, espectros de respuesta con amortiguamiento nulo en el cálculo de presiones hidrodinámicas para excitaciones vertical y transversal y, por otra, espectros hidrodinámicos (1) para excitación longitudinal. Se ha definido un amortiguamiento equivalente (6), con el que se puede construir el espectro hidrodinámico a partir de espectros de respuesta amortiguados.

\* Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.

Motivaron el estudio los resultados obtenidos para una presa con depósito de sección rectangular, sometida a excitación vertical (3), que proporcionan presiones hidrodinámicas sorprendentemente altas. Se trata de investigar la influencia de la forma del vaso. En depósitos de fondo plano se obtienen reducciones sustanciales si se consideran reflexión y refracción parcial de las ondas en el fondo (4), y cabe suponer que lo mismo será cierto para otras secciones, pero el tema no se abordará en este escrito.

Se ha encontrado que la influencia del oleaje en las presiones hidrodinámicas es despreciable (5) especialmente si se considera en el análisis la compresibilidad del líquido. Por ejemplo, en depósitos de 100 m de profundidad el periodo dado por la compresibilidad es del orden de un cuarto de segundo, mientras que en ese periodo el oleaje resulta despreciable (10). Este hecho se comprobó en el estudio del Wolffer (9), donde se resuelve numéricamente el problema de depósito semicircular ante excitación vertical, encontrándose que la influencia del oleaje decrece rápidamente con la frecuencia; aun así, los errores que encuentra Wolffer son del orden de 10 por ciento en los empujes hidrodinámicos para una profundidad de 30 m y menores para profundidades mayores a una frecuencia de un rad/seg. Analizando las ecuaciones de esta solución, que tienen gran similitud con las planteadas para excitación transversal, puede esperarse que se cometan errores semejantes al despreciar el efecto del oleaje. Se ha recopilado una extensa bibliografía sobre oleaje (11), y su revisión indica que en términos generales carece de importancia el oleaje en presas sujetas a sismo (5), si bien localmente el fenómeno puede ser significativo.

Ordinariamente se desprecian en el diseño los efectos de la excitación trasversal, sin importar la forma del vaso.

Con fines de comparación se presentan los resultados obtenidos para sección rectangular, por Flores (5) para excitación longitudinal y por Chopra (3) para la vertical, y se resuelve el problema para excitación transversal.

## 2. FORMULACION DEL PROBLEMA

Se aceptan las siguientes hipótesis:

1. El vaso es un cilindro recto de sección semicircular (fig 1)
2. El líquido es invíscido e irrotacional
3. Los desplazamientos son pequeños comparados con las dimensiones de la presa
4. No se generan ondas de gravedad en la superficie libre
5. Los bordes del vaso son infinitamente rígidos
6. El paramento de la cortina aguas arriba es vertical
7. La excitación actúa simultáneamente en las interfases agua-presa y agua-vaso.

Con estas hipótesis la ecuación diferencial que gobierna el fenómeno es (7)

$$\nabla^2 \phi = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (1)$$

en la cual  $\phi$  = potencial de velocidades,  $c$  = velocidad del sonido en el agua,  $t$  = tiempo y  $\nabla^2$  = operador de Laplace. Si  $u$ ,  $v$  y  $w$  son los componentes de desplazamiento paralelos a los ejes coordenados  $X$ ,  $Y$  y  $Z$ , se satisfacen las siguientes relaciones

$$\frac{\partial u}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial X} \quad \frac{\partial v}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial Y} \quad \frac{\partial w}{\partial t} = - \frac{\partial \phi}{\partial Z} \quad (2)$$

A partir del potencial de velocidades puede obtenerse la presión hidrodinámica  $p$ :

$$p = - \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3)$$

donde  $\gamma$  es el peso volumétrico del agua y  $g$  la aceleración de la gravedad.

Las condiciones de frontera de la ec 1 se determinan para cada tipo de excitación.

### 3. EXCITACION PARALELA AL EJE DEL VASO

En coordenadas cilíndricas  $r$ ,  $\theta$  y  $z$ , como se muestra en la fig 1, la ec 1 se puede escribir como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (4)$$



Para movimiento paralelo al eje  $z$  se tienen las condiciones de frontera

$$\left( \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\theta=0} = \left( \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\theta=\pi} = 0 \quad (5)$$

$$\left( \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{r=0} = 0 \quad (6)$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial r} \right)_{r=H} = 0 \quad (7)$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial z} \right)_{z=0} = - \ddot{w}_0(t) \quad (8)$$

donde  $H$  = profundidad = radio del cilindro y  $\ddot{w}_0$  = aceleración del terreno paralela al eje  $z$ . Si el líquido está en reposo al principio del movimiento, las condiciones iniciales son

$$(\phi)_{t=0} = 0 \quad (9)$$

$$\left( \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (10)$$

La solución para la presión hidrodinámica en  $z = 0$ , a partir de la solución de Kotsubo (1), resulta entonces

$$p = \frac{8\gamma H}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \nu_m \theta}{\nu_m} \cdot \frac{F_{mn} J_{\nu_m}(\lambda_{\nu_m n} r/H)}{(\lambda_{\nu_m n}^2 - \nu_m^2) J_{\nu_m}^2(\lambda_{\nu_m n}) \lambda_{\nu_m n}} \cdot \frac{S_{mn}(t)}{g} \quad (11)$$

donde

$$\nu_m = 2m-1$$

$J_{\nu_m}$  = función de Bessel de primera clase de orden  $\nu_m$

$\lambda_{\nu_m n}$  = n-ésima raíz positiva de la ecuación  $J'_{\nu_m}(\lambda) = 0$

$$F_{mn} = \int_0^{\lambda_{\nu_m n}} \eta J_{\nu_m}(\eta) d\eta \quad (12)$$

$\eta$  = variable de integración

$$S_{mn}(t) = \omega_{mn} \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) J_0[\omega_{mn}(t-\tau)] d\tau \quad (13)$$

$$\omega_{mn} = \lambda_{\nu_m n} c/H$$

Si se define el espectro hidrodinámico como

$$S(\omega_{mn}) = \text{máx} |S_{mn}(t)| \quad (14)$$

la presión máxima en el modo mn resulta

$$P_{mn} = \frac{8\gamma\alpha_{mn} H \text{ sen } v_m \theta}{\pi v_m} \frac{F_{mn} J_{v_m}(\lambda_{v_m n} r/H)}{(\lambda_{v_m n}^2 - v_m^2) J_{v_m}^2(\lambda_{v_m n}) \lambda_{v_m n}} \quad (15)$$

donde  $\alpha_{mn} = S(\omega_{mn})/g$  es la ordenada espectral como fracción de g. En la fig 2 se muestra la distribución de la presión hidrodinámica en el primer modo. Integrando la ec 15 se encuentra

$$\frac{E_{mn}}{E_0 \alpha_{mn}} = \frac{24}{\pi} \frac{F_{mn}^2}{(\lambda_{v_m n}^2 - v_m^2) J_{v_m}^2(\lambda_{v_m n}) \lambda_{v_m n}^3 v_m^2} \quad (16)$$

siendo  $E_{mn}$  el empuje hidrodinámico en el modo mn y  $E_0 = (2/3)\gamma H^3$  el empuje hidrostático. Mediante integración de la ec 15 se obtiene

$$\frac{M_{mn}}{M_0 \alpha_{mn}} = \frac{16}{16-3\pi} \left[ \frac{E_{mn}}{E_0 \alpha_{mn}} - \frac{6 F_{1n} J_2(\lambda_{1n}) \delta_{1m}}{(\lambda_{1m}^2 - 1) J_1^2(\lambda_{1n}) \lambda_{1n}^2} \right] \quad (17)$$

donde  $M_{mn}$  = momento de volteo en la base de la cortina en el modo mn,  
 $M_0 = \gamma H^4 (16-3\pi)/24$  = momento de volteo hidrostático y  $\delta_{ij}$  delta de Kronecker, igual a uno si  $i = j$  y cero si  $i \neq j$ . Para sección rectangular puede escribirse (Flores, 5), de acuerdo con la convención de ejes mostrada en la fig 3,

$$p = \frac{8\gamma H}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^{m-1}}{v_m} \frac{S_m(t)}{g} \cos \frac{v_m \pi y}{2H} \quad (18)$$

donde

$$S_m(t) = \omega_m \int_0^t \ddot{w}_0(\tau) J_0 \left[ \omega_m(t-\tau) \right] d\tau \quad (19)$$

$$\omega_m = \frac{v_m \pi c}{2H} = \text{frecuencia circular natural del modo } m$$

La fig 3 presenta la distribución de la presión hidrodinámica en el primer modo así como la calculada como raíz cuadrada de la suma de cuadrados de las contribuciones modales. Se aprecia que la diferencia es insignificante. En la misma figura se presenta la distribución de  $p$  si se calcula la suma indicada en la ec 18 con  $S_m(t)/g = \alpha$ .

La tabla 1 presenta empujes y momentos de volteo en los primeros tres modos así como la combinación de respuestas para secciones semicircular y rectangular.

#### 4. EXCITACION VERTICAL

El problema se transforma en bidimensional y la ec 4 puede escribirse como

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (20)$$

aceptando las condiciones de las ecs 5, 6, 9 y 10, y añadiendo la condición

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} \right)_{r=H} = - \ddot{v}_0(t) \text{ sen } \theta \quad (21)$$

donde  $\ddot{v}_0(t)$  = aceleración vertical del terreno.

La solución de la ec 20 sujeta a las condiciones mencionadas resulta  
(Apéndice A)

$$p = 2\gamma H \text{ sen } \theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_{1m} r/H)}{J_1(\lambda_{1m}) (\lambda_{1m}^2 - 1)} \frac{S_m(t)}{g} \quad (22)$$

Aquí

$$S_m(t) = \omega_m \int_0^t \ddot{v}_0(\tau) \text{ sen } \omega_m(t-\tau) d\tau \quad (23)$$

ecuación que corresponde a la respuesta de un oscilador simple no amortiguado de frecuencia  $\omega_m = \lambda_{1m} c/H$ . El máximo absoluto que puede alcanzar  $S_m(t)$  es función de  $\omega_m$  y se denomina espectro de respuesta.

Con  $S_m(t)/g = \alpha_m = \alpha$  se muestra en la fig 4 la distribución de la presión en el primer modo, así como la distribución aplicando el criterio de raíz cuadrada de suma de cuadrados. Si se calcula la suma de la ec 22 haciendo  $S_m(t)/g = \alpha$ , la distribución resultante es lineal y es, efectivamente, la distribución hidrostática, con una aceleración de la gravedad igual a  $\alpha g$ .

Integrando se obtienen los empujes y momentos de volteo en cada modo:

$$\frac{E_m}{E_0 \alpha_m} = \frac{6 \left[ \int_0^{\lambda_{1m}} J_0(\eta) d\eta - \lambda_{1m} J_0(\lambda_{1m}) \right]}{J_1(\lambda_{1m}) (\lambda_{1m}^2 - 1) \lambda_{1m}^2} \quad (24)$$

$$\frac{M_m}{M_0 \alpha_m} = \frac{16}{16 - 3\pi} \left[ \frac{E_m}{E_0 \alpha_m} - \frac{3\pi}{2} \frac{J_2(\lambda_{1m})}{J_1(\lambda_{1m}) (\lambda_{1m}^2 - 1) \lambda_{1m}} \right] \quad (25)$$

En estas expresiones  $E_m$  y  $M_m$  son respectivamente el empuje y momento de volteo hidrodinámicos en el modo  $m$ .

Para sección rectangular, a partir de la solución de Chopra (3) se obtiene

$$p = \frac{8\gamma H}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{v_m^2} \frac{S_m(t)}{g} \cos \frac{v_m \pi y}{2H} \quad (26)$$

donde  $S_m(t)$  está dado por la ec 23 y  $\omega_m = \pi v_m c / 2H$ . En la fig 5 se muestran la distribución de la presión en el primer modo, la distribución calculada empleando el criterio de combinación de modos mencionado antes y la que se obtiene como la suma de la ec 26 con  $S_m(t)/g = \alpha$ .

En la tabla 2 se anotan los valores de los empujes y momentos de volteo en los primeros tres modos así como sus valores máximos, combinados de acuerdo al criterio de raíz de la suma de cuadrados, para las secciones semicircular y rectangular.

## 5. EXCITACION TRASVERSAL

Gobierna la ec 20 sujeta a las condiciones de las ecs 5, 6, 9 y 10 y a la condición siguiente, que sustituye a la ec 21:

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} \right)_{r=H} = - \ddot{u}_0(t) \cos \theta \quad (27)$$

donde  $\ddot{u}_0(t)$  = aceleración horizontal del terreno perpendicular al eje del vaso.

La solución de la ec 20 sujeta a las condiciones mencionadas resulta (Apéndice A):

$$p = \frac{8\gamma H}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{v_m}{v_m^2 - 1} \frac{S_{mn}(t)}{g} \sin v_m \theta \frac{J_{v_m}(\lambda_{v_m n} r/H)}{J_{v_m}(\lambda_{v_m n}) (v_m^2 - \lambda_{v_m n}^2)} \quad (28)$$

donde

$$v_m = 2m$$

$$S_{mn}(t) = \omega_{mn} \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau \quad (29)$$

$$\omega_{mn} = \lambda_{v_m n} c/H = \text{frecuencia circular natural del modo } mn$$

$$\lambda_{v_m n} = n\text{-ésima raíz positiva de } J'_{v_m}(\lambda) = 0$$

En la fig 6 se muestra la distribución de presiones en el primer modo. Para esta clase de excitación las distribuciones de presiones son antimétricas y el empuje y momento de volteo hidrodinámicos son nulos.

La acción resultante es un momento alrededor de un eje vertical. Mediante integración de la ec 28 y haciendo  $S_{mn}(t)/g = \alpha_{mn}$  se encuentra

$$\frac{M_{mn}}{M_0 \alpha_{mn}} = \frac{384}{\pi(16-3\pi)} \frac{v_m^2}{(v_m^2-1)^2} \frac{\int_0^{\lambda_{v_m n}} \lambda_{v_m n}^n \eta^2 J_{v_m}(\eta) d\eta}{(v_m^2 - \lambda_{v_m n}^2) J_{v_m}(\lambda_{v_m n}) \lambda_{v_m n}^3} \quad (30)$$

siendo  $M_{mn}$  el momento con respecto al eje y, de acuerdo a la notación de la fig 1, en el modo mn.



Para sección rectangular la solución depende marcadamente de la relación  $L/H$ , en que  $L$  = ancho del vaso y  $H$  = profundidad. La solución en el sistema de referencia que muestra la fig 7, resulta (Apéndice B):

$$p = \frac{16\gamma H^2}{\pi^3 L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } \pi a y / 2H \cos \pi b x / L}{a \left[ (a/2)^2 + (bH/L)^2 \right]} \cdot \frac{S_{mn}(t)}{g} \quad (31)$$

donde

$$S_{mn}(t) = \dot{\omega}_{mn} \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \text{sen } \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$$

$$a = 2n-1$$

$$b = 2m-1$$

$$\omega_{mn} = \frac{\pi c}{H} \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{bH}{L}\right)^2} = \text{frecuencia circular natural del modo } mn$$

La distribución de la presión en el primer modo se muestra en la fig 8a para  $L/H = 3/2$ . La fig 8b presenta la distribución para sección semicircular. A partir de la ec 31 se obtiene, si  $S_{mn}(t)/g = \alpha_{mn}$ ,

$$\frac{M_{mn}}{M_0 \alpha_{mn}} = \frac{96}{\pi^6} \left\{ \left[ \left[ \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{bH}{L}\right)^2 \right] \left(\frac{a}{2}\right)^2 b^2 \right]^{-1} \right\} \quad (32)$$

donde  $M_{mn}$  es el momento hidrodinámico con respecto a la vertical en  $x = L/2$  en el modo  $mn$ ,  $M_0 = \gamma H^3 L/6$  es el momento de volteo hidrostático. La fig 9 muestra la variación del momento con respecto a la relación  $L/H$  en el primer modo y la combinación modal usando el criterio mencionado.

La tabla 3 exhibe momentos con respecto a la vertical en los primeros tres modos en la sección semicircular así como el momento obtenido combinando con el criterio de raíz de la suma de cuadrados.

En la tabla 4 se dan los periodos naturales de oscilación en secciones semicircular y rectangular para los diferentes tipos de excitaciones. En secciones rectangulares se tomó  $L/H = 3/2$ .

## 6. CONCLUSIONES

A pesar de que pueden presentarse reducciones por diversas causas en presiones hidrodinámicas debidas a excitación vertical y trasversal, seguramente sus efectos no serán despreciables y deberán tomarse en cuenta en diseño.

La forma de la sección influye en la magnitud de la respuesta, reduciendola en todos los casos con respecto a la sección rectangular. Por ejemplo ante excitación trasversal el momento en la sección semicircular es del orden de  $2/3$  del que se genera en la rectangular para la relación  $L/H = \pi/2$ , que es el caso de igual área y profundidad que la sección semicircular.

El primer modo puede representar apropiadamente la respuesta máxima para espectro constante. Aun para otros espectros la contribución del primer modo en la combinación de las respuestas es dominante.

## 7. RECONOCIMIENTO

Los autores agradecen a Luis Esteva la revisión crítica del manuscrito.

APENDICE A. SOLUCION DE LA ECUACION 20

Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{A.1})$$

con condiciones de frontera

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\theta=0} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{\theta=\pi} = 0 \quad (\text{A.2})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} \right)_{r=H} = - \ddot{v}_0(t) \text{ sen } \theta \quad (\text{A.3})$$

y condiciones iniciales

$$(\phi)_{t=0} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (\text{A.4})$$

Supóngase que  $\ddot{v}_0(t) = \delta(t)$  (impulso unitario), donde  $\delta(\cdot) =$  delta de Dirac; así la condición A.3 queda

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} \right)_{r=H} = - \delta(t) \text{ sen } \theta \quad (\text{A.5})$$

Tomando transformadas de Laplace en la ec A.1 se tiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} = \frac{s^2}{c^2} f \quad (\text{A.6})$$

donde  $f$  es la transformada de  $\phi$ , esto es

$$f(r, \theta, s) = \mathcal{L}\{\phi(r, \theta, t)\} \quad (\text{A.7})$$

Sea  $f = R(r) \text{ sen } \theta$ . Sustituyendo en la ec A.6 se puede escribir

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \left( \frac{1}{r^2} + \frac{s^2}{c^2} \right) R = 0 \quad (\text{A.8})$$

que es la ecuación de Bessel modificada. Su solución es

$$R = A I_1(sr/c) \quad (\text{A.9})$$

donde  $A = \text{constante}$  e  $I_1 = \text{función de Bessel modificada de orden uno}$ . Entonces la solución puede escribirse como

$$f(r, \theta, s) = A I_1(sr/c) \text{ sen } \theta \quad (\text{A.10})$$

Debe observarse que como  $\theta$  es una variable independiente de la transformación, A.2 se satisfacen.

Para valuar A se toma la transformada de Laplace en la ec A.5, obteniéndose

$$A = \frac{-1}{(s^2/c) I_1'(sH/c)} \quad (\text{A.11})$$

donde  $I_1'(\eta) = \frac{d}{d\eta} I_1(\eta)$ . Sustituyendo A.11 en A.10,

$$f(r, \theta, s) = - \frac{c}{s^2} \frac{I_1(sr/c)}{I_1'(sH/c)} \text{ sen } \theta \quad (\text{A.12})$$

como  $p = \frac{\gamma}{g} \frac{\partial \phi}{\partial t}$  (ec 3) y  $\mathcal{L}\{p\} = \frac{\gamma}{g} sf$ , entonces  $p = \frac{\gamma}{g} \mathcal{L}^{-1}\{sf\}$ . Así la presión vale

$$p = - \frac{c\gamma \text{ sen } 2\theta}{g 2\pi i} \int_{\beta-i\infty}^{\beta+i\infty} \frac{I_1(sr/c)}{s I_1'(sH/c)} e^{st} ds \quad (\text{A.13})$$

siendo  $i = \sqrt{-1}$  y  $\beta =$  abscisa de la línea de integración en el plano complejo.

Aplicando el método de los residuos (8) y empleando las relaciones entre las funciones de Bessel modificadas y las funciones de Bessel se puede llegar a

$$p = \frac{2\gamma c}{g} \text{ sen } \theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1m} J_1(\lambda_{1m} r/H)}{J_1(\lambda_{1m}) (\lambda_{1m}^2 - 1)} \text{ sen } \lambda_{1m} \frac{c}{H} t \quad (\text{A.14})$$

donde  $\lambda_{1m}$  es la  $m$ -ésima raíz positiva de  $J_1'(\lambda) = 0$ .

La ec A.14 es la solución para  $\ddot{v}_0(t)$  igual a un impulso unitario en  $t = 0$ . La presión hidrodinámica debida a un movimiento vertical  $v_0(t)$  será

$$p = 2\gamma H \sin \theta \sum_{m=1}^{\infty} \frac{J_1(\lambda_{1m} r/H)}{J_1(\lambda_{1m}) (\lambda_{1m}^2 - 1)} \cdot \frac{S_m(t)}{g} \quad (\text{A.15})$$

donde  $S_m(t) = \omega_m \int_0^t \ddot{v}_0(\tau) \sin \omega_m(t-\tau) d\tau$  y  $\omega_m = \lambda_{1m} c/H$ .

Si en lugar de la condición A.3 o la A.5 se tiene

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial r} \right)_{r=H} = - \ddot{u}_0(t) \cos \theta \quad (\text{A.16})$$

Considerando que

$$\cos \theta = \frac{4}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{4m^2 - 1} \sin 2m\theta \quad (\text{A.17})$$

y haciendo  $f = \sum f_m$ , donde  $f_m = \frac{4}{\pi} \left( \frac{2m}{4m^2 - 1} \right) R_m(r) \sin 2m\theta$ , cada término de la serie debe satisfacer la ecuación diferencial A.6; así se obtiene

$$\frac{d^2 R_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_m}{dr} - \left[ \left( \frac{2m}{r} \right)^2 + \frac{s^2}{c^2} \right] R_m = 0 \quad (\text{A.18})$$

cuya solución resulta

$$R_m(r) = A_m I_{2m}(sr/c) \quad (\text{A.19})$$

donde  $A_m$  = constante que depende de  $m$ , e  $I_{2m}$  = función de Bessel modificada de orden  $2m$ .

Suponiendo que  $\ddot{u}_0(t) = \delta(t)$ , tomando la trasformada de Laplace en la ec A.16 y considerando la ec A.17 se obtiene

$$f(r, \theta, s) = -\frac{4}{\pi} \frac{c}{s^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2m}{4m^2-1} \frac{I_{2m}(sr/c)}{I'_{2m}(sH/c)} \text{sen } 2m\theta \quad (\text{A.20})$$

Calculando la antitrasformada de Laplace de  $sf$ , por el método de los residuos y haciendo la convolución de la respuesta al impulso unitario con  $\ddot{u}_0(t)$  se obtiene la presión hidrodinámica debida a excitación trasversal:

$$p = \frac{8\gamma H}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2m}{4m^2-1} \frac{J_{2m}(\lambda_{2mn} r/H)}{J'_{2m}(\lambda_{2mn}) (4m^2 - \lambda_{2mn}^2)} \cdot \frac{S_{mn}(t)}{g} \cdot \text{sen } 2m\theta \quad (\text{A.21})$$

donde  $S_{mn}(t) = \omega_{mn} \int_0^t \ddot{u}_0(t) \text{sen } \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$ ,  $\omega_{mn} = \lambda_{2mn} c/H$  y  $\lambda_{2mn}$  es la  $n$ -ésima raíz positiva de  $J'_{2m}(\lambda) = 0$ .



APENDICE B. SOLUCION DE LA ECUACION 1 PARA EXCITACION TRASVERSAL EN  
SECCION RECTANGULAR

Considérese la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \quad (\text{B.1})$$

con condiciones de frontera

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial y} \right)_{y=H} = 0 \quad (\text{B.2})$$

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{y=0} = 0 \quad (\text{B.3})$$

$$\left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right)_{x=0} = \left( \frac{\partial^2 \phi}{\partial t \partial x} \right)_{x=L} = -\ddot{u}_0(t) \quad (\text{B.4})$$

e iniciales

$$(\phi)_{t=0} = \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Sea  $f$  la transformada de Laplace de  $\phi$ . Tomando transformadas en la ec B.1 y considerando la B.5 se obtiene

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{s^2}{c^2} f \quad (\text{B.6})$$

Haciendo que  $\ddot{u}_0(t) = \delta(t)$ , tomando la transformada de Laplace de las condiciones B.2 a B.4 y aplicando el método de separación de variables resulta

$$f = \frac{4}{\pi s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)\pi y/2H}{2n-1} \cdot \frac{\cosh \eta(L-x) - \cosh \eta x}{\eta \text{senh } \eta L} \quad (\text{B.7})$$

donde  $\eta = \sqrt{k^2 + s^2/c^2}$  y  $k = (2n-1)\pi y/2H$ . La aplicación del método de los residuos, para obtener la antitrasformada de  $sf$ , conduce a

$$p = \frac{16\gamma c^2}{\pi g L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen}(2n-1)\pi y/2H \cos(2m-1)\pi x/L}{2n-1} \frac{\text{sen } \omega_{mn} t}{\omega_{mn}} \quad (\text{B.8})$$

$$\text{donde } \omega_{mn} = \pi c \sqrt{\left(\frac{2n-1}{2H}\right)^2 + \left(\frac{2m-1}{L}\right)^2} .$$

La ec B.8 es la presión hidrodinámica generada por un impulso unitario.

Haciendo la convolución de la respuesta con  $\ddot{u}_0(t)$  se obtiene

$$p = \frac{16\gamma H^2}{\pi^3 L} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \pi a y / 2H \cos \pi b x / L}{a \left[ (a/2)^2 + (bH/L)^2 \right]} \frac{S_{mn}(t)}{g} \quad (\text{B.9})$$

que es la presión hidrodinámica generada por excitación transversal  $\ddot{u}_0(t)$ .

En esta ecuación  $S_{mn}(t) = \omega_{mn} \int_0^t \ddot{u}_0(\tau) \sin \omega_{mn}(t-\tau) d\tau$ ,  $a = 2n-1$  y

$b = 2m-1$ .

## REFERENCIAS

1. Kotsubo, S, "Dynamic water pressure on dams due to irregular earthquakes", *Memoirs, Faculty of Engineering, Kyushu University, Fukuoka, Japón*, 18, 4 (1959), 119-29
2. Werner, P W y Sundquist, K J, "On hydrodynamic earthquake effects", *Transactions, American Geophysical Union*, 30, 5 (oct 1949), 636-57
3. Chopra, A K, "Hydrodynamic pressures on dams during earthquakes", *Proc. ASCE*, 93, EM6 (1967), 205-23
4. Rosenblueth, E, "Presión hidrodinámica en presas debida a aceleración vertical con refracción en el fondo", II Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, Veracruz (1968), *Ingeniería*, 38, 2 (1968), 199-208
5. Flores, A, "Presión hidrodinámica en presas sujetas a sismos", Tesis de maestría, Universidad Nacional Autónoma de Mexico (1966)
6. Rosenblueth, E, "Presión hidrodinámica en cortinas de gravedad", III Simposio Panamericano de Estructuras, Caracas, Venezuela (1967), *Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México*, informe 161 (jun 1968)

7. Newmark, N My Rosenblueth, E, *Fundamentals of earthquake engineering*, Prentice Hall, Inc, Englewood Cliffs, N J. (1971)
8. Churchill, R V, *Operational Mathematics*, Mc Graw Hill Book Co., Nueva York (1958)
9. Wolffer, J F, "Presiones hidrodinámicas en presas durante temblores debidas a aceleración vertical", Tesis doctoral, Universidad Nacional Autónoma de Mexico (1970)
10. Flores, A, "Presión hidrodinámica en presas y tanques", Tesis profesional, Universidad Nacional Autónoma de México (1963)
11. Flores, A y Bustamante, J I, "Bibliografía sobre oleaje producido por sismos", *Instituto de Ingeniería*, Universidad Nacional Autónoma de México, informe 110, (1964)

Tabla 1. Empujes y momentos de volteo en los tres primeros modos y combinación de las respuestas para excitación longitudinal

Sección	Semicircular		Rectangular	
Modo	$E/\alpha E_0$	$M/\alpha M_0$	$E/\alpha E_0$	$M/\alpha M_0$
1	0.971	1.014	1.032	1.125
2	0.039	0.096	0.038	0.139
3	0.016	0.049	0.008	0.022
$\sqrt{\Sigma(.)^2}$	0.972	1.020	1.033	1.134

Tabla 2. Empujes y momentos de volteo en los tres primeros modos y combinación de las respuestas para excitación vertical

Sección	Semicircular		Rectangular	
Modo	$E/\alpha E_0$	$M/\alpha M_0$	$E/\alpha E_0$	$M/\alpha M_0$
1	1.019	1.066	1.032	1.125
2	0.023	0.070	0.038	0.139
3	0.004	0.008	0.008	0.022
$\sqrt{\Sigma(.)^2}$	1.020	1.068	1.033	1.134

Tabla 3. Momentos con respecto a un eje vertical de la sección, normalizados con respecto al momento hidrostático de volteo, en los tres primeros modos y combinación de las respuestas para excitación trasversal en sección semicircular

Modo	$M/\alpha M_0$
1	0.413
2	0.024
3	0.005
$\sqrt{\Sigma(.)^2}$	0.414

Tabla 4. Periodos naturales de oscilación  $100 T/H$  (T en s, H en m)

Sección	Semicircular			Rectangular	
	longitudinal	vertical	trasversal	longitudinal y vertical	trasversal ( $\frac{L}{H} = \frac{3}{2}$ )
modo 1	0.237	0.237	0.143	0.278	0.167
modo 2	0.104	0.082	0.082	0.093	0.085
modo 3	0.082	0.051	0.065	0.056	0.067

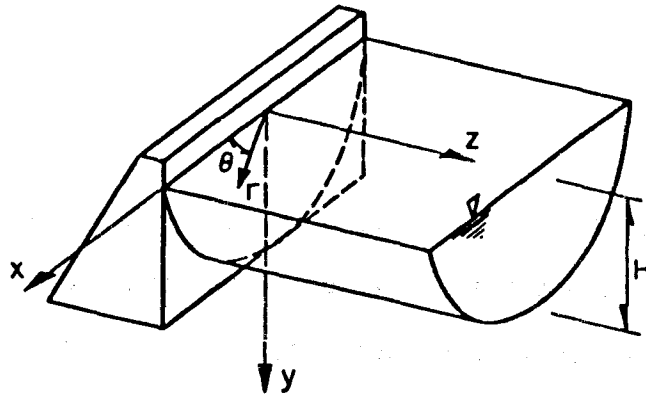


Fig 1. Vaso cilíndrico de sección semicircular

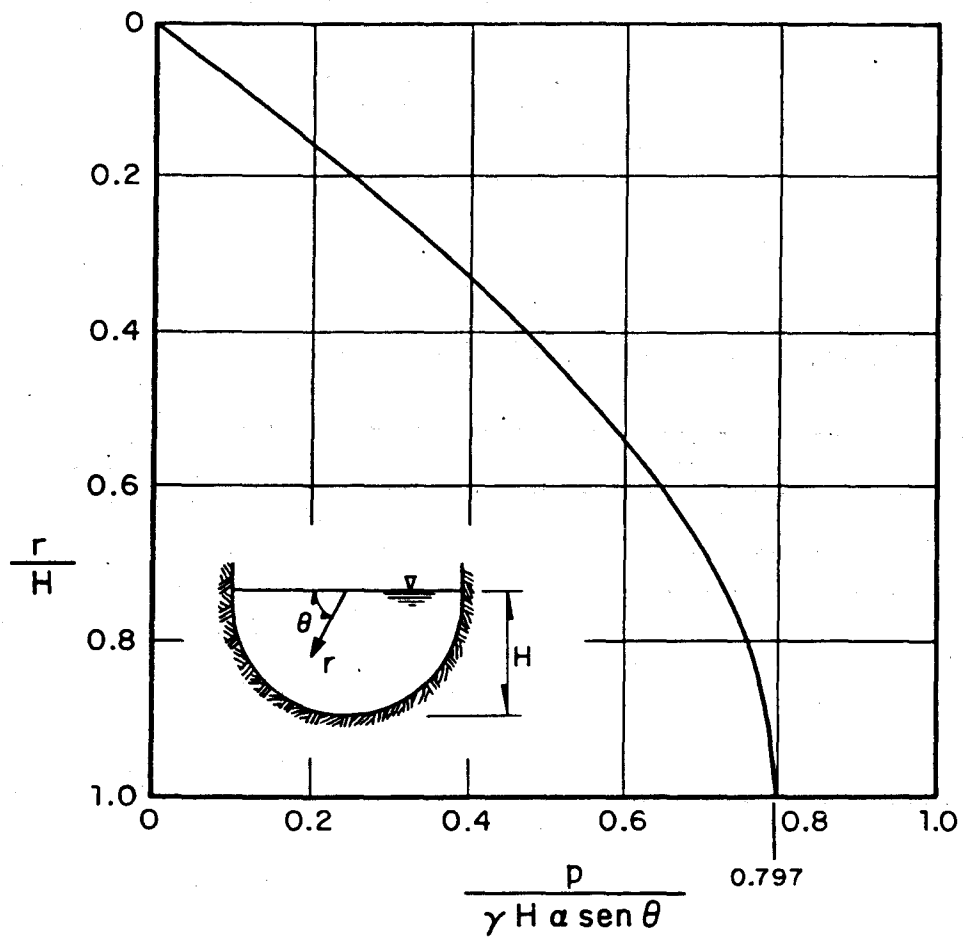


Fig 2. Presión hidrodinámica en sección semicircular para excitación longitudinal (solución de Kotsubo)



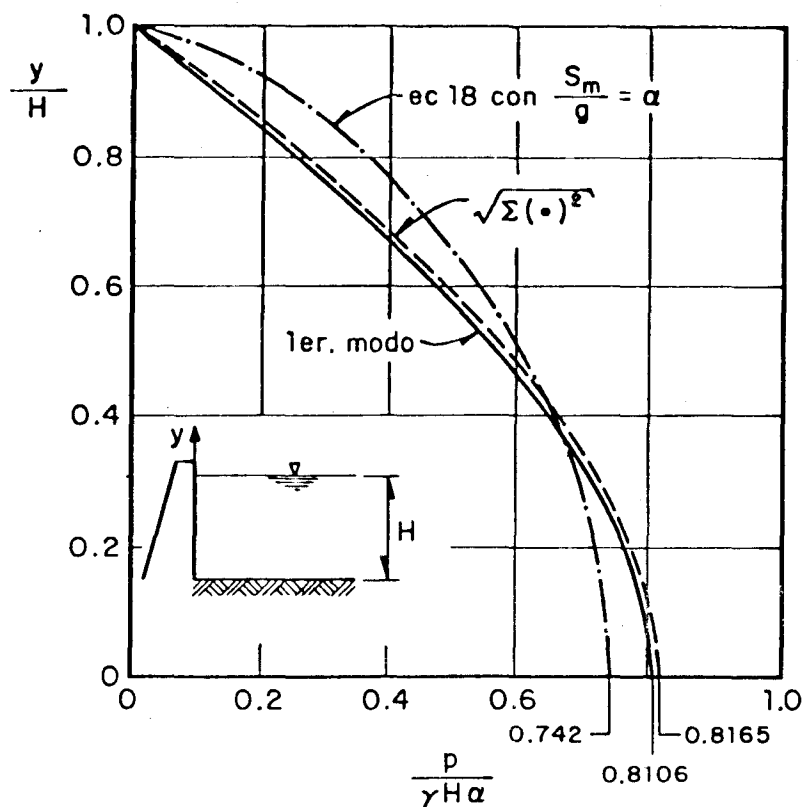


Fig 3. Presiones para excitación longitudinal en sección rectangular

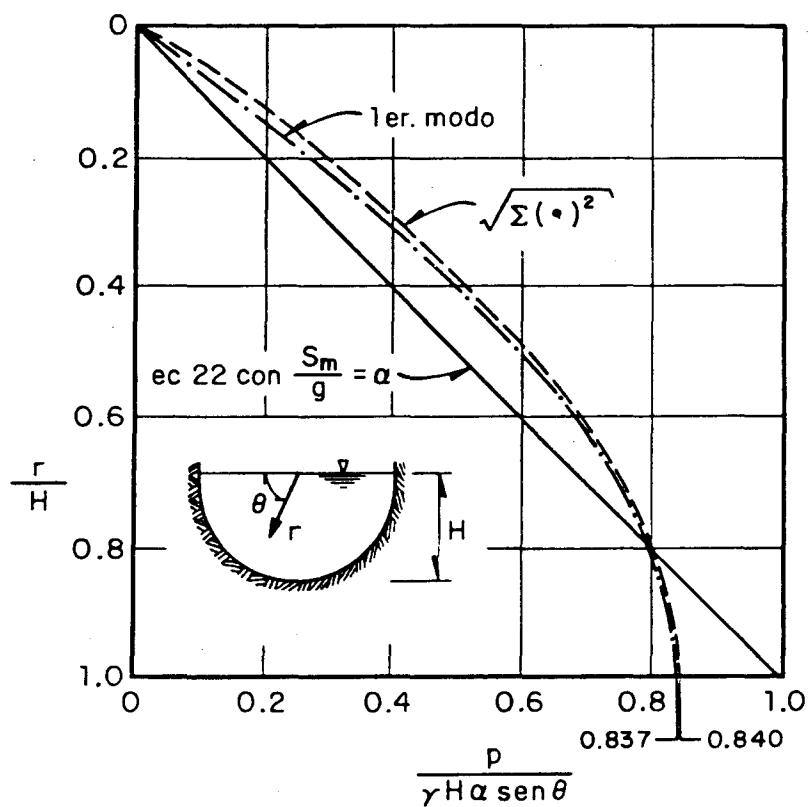


Fig 4. Presiones hidrodinámicas en sección semi-circular para excitación vertical

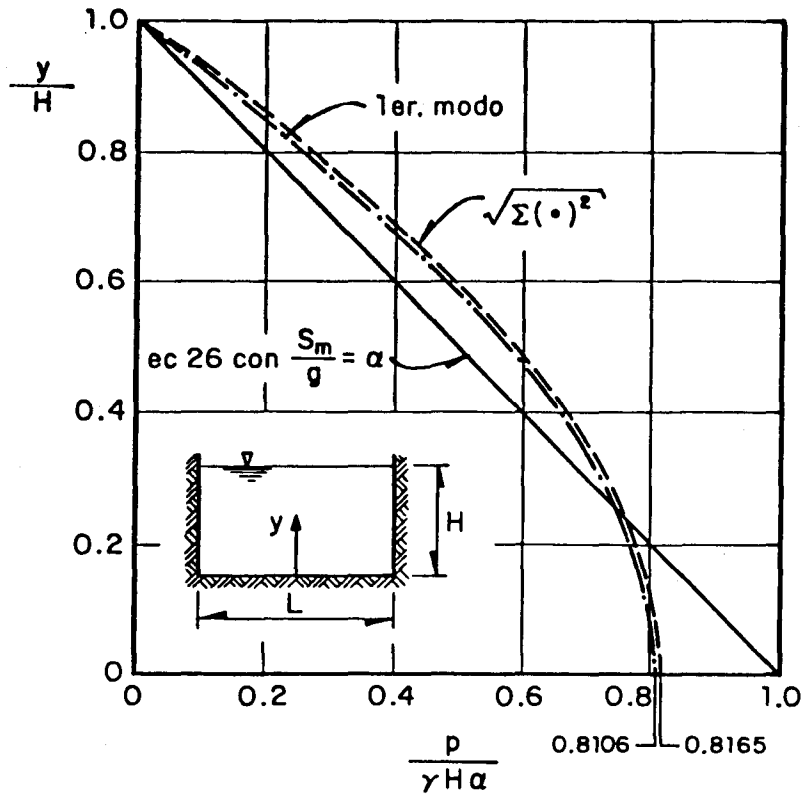


Fig 5. Presiones hidrodinámicas en sección rectangular sujeta a excitación vertical

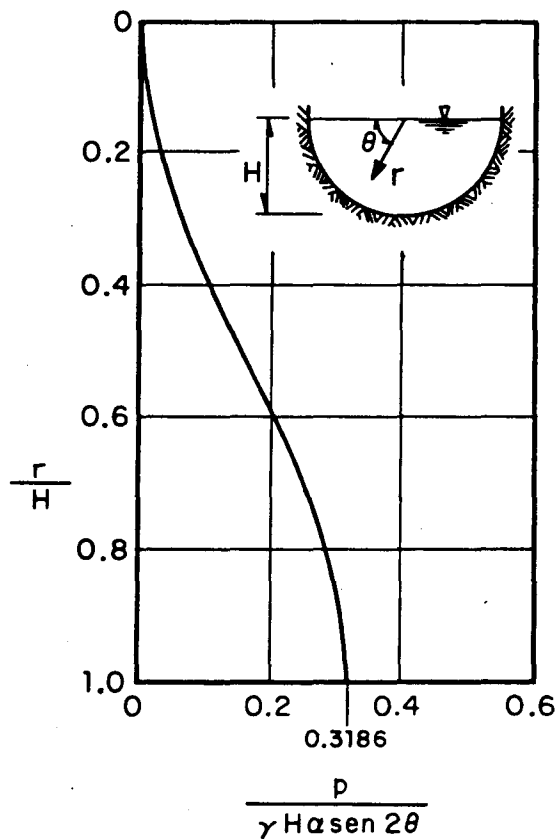


Fig 6. Presiones hidrodinámicas en el primer modo para excitación trasversal

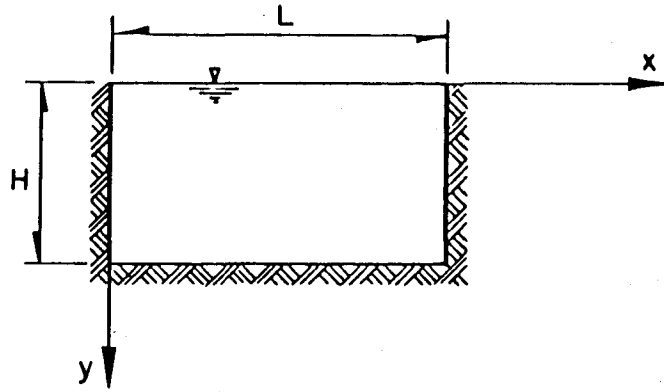


Fig 7. Sección rectangular

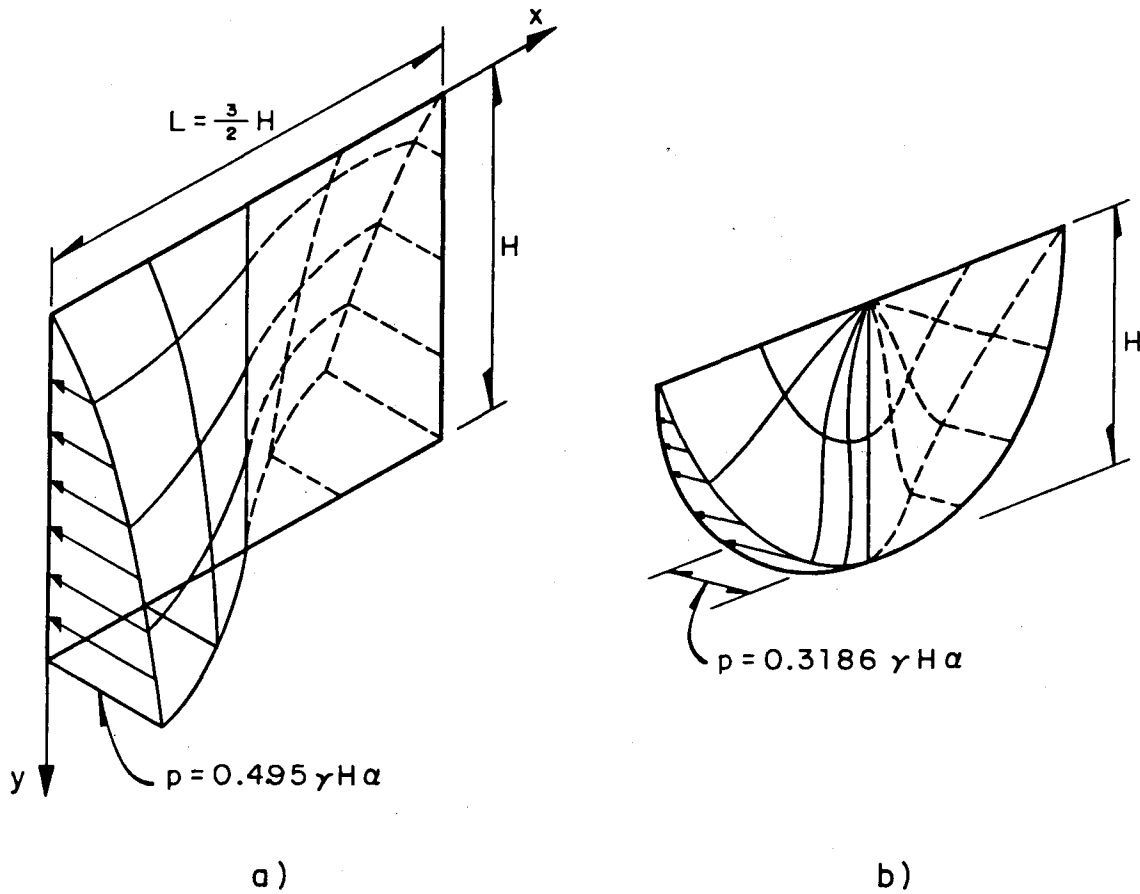


Fig 8. Presiones hidrodinámicas en el primer modo para excitación transversal en a) sección rectangular, con  $L/H = 3/2$ , b) sección semicircular

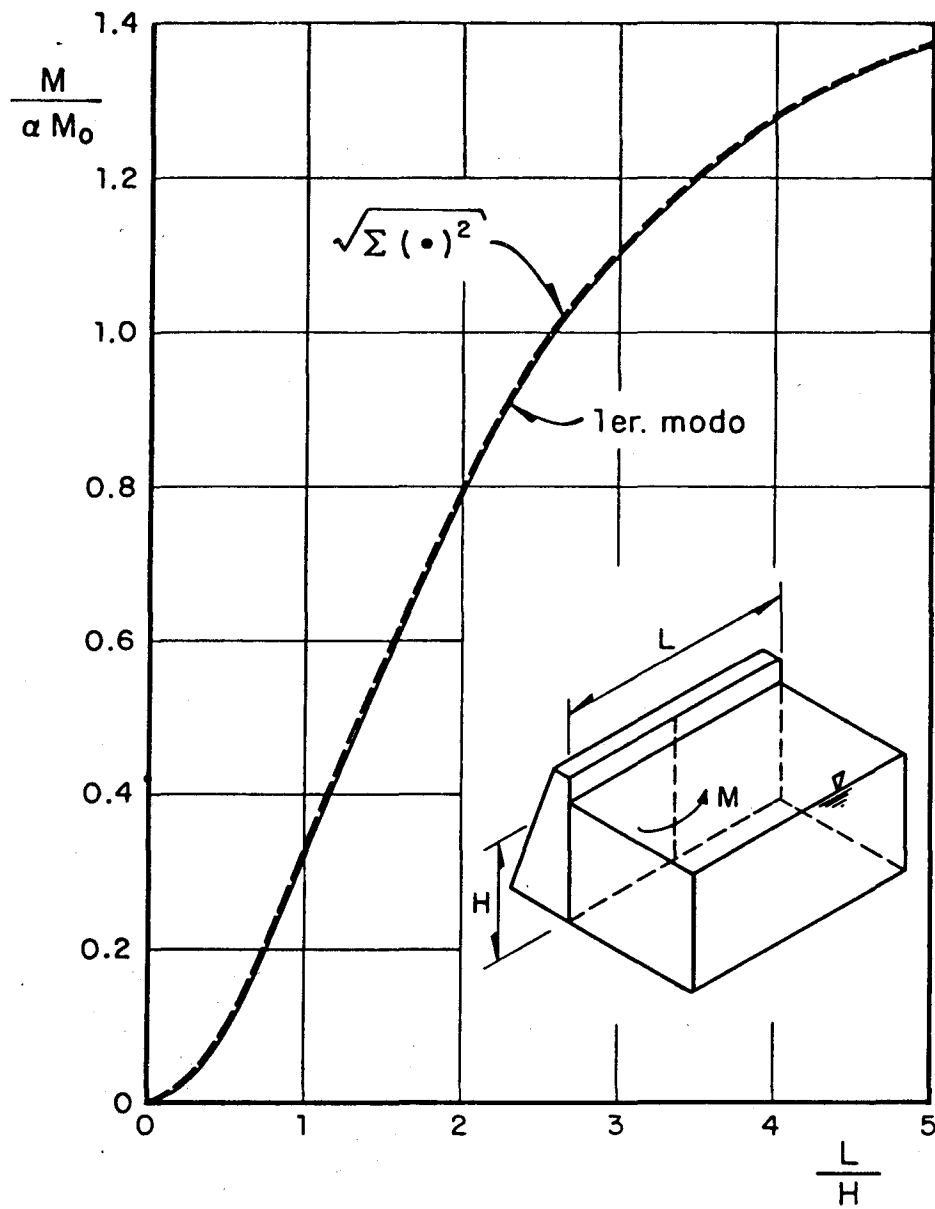


Fig 9. Momento para excitación trasversal, sección rectangular