

## IDENTIFICACIÓN DE ESTADOS LÍMITE PLÁSTICOS DE EDIFICIOS SOMETIDOS A TORSIÓN POR SISMO

*G M Arroyo Contreras<sup>1</sup> y C G Villarreal Esquivel<sup>1</sup>*

### RESUMEN

El objetivo de este trabajo es proponer una metodología simplificada para los análisis elastoplásticos estáticos de edificios sometidos a torsión por sismo. La metodología se aplica a sistemas estructurales tridimensionales, formados a base de marcos planos, con comportamiento elastoplástico, sujetos a fuerza sísmica estática, monótona creciente. Dado que en estructuras con un alto grado de redundancia e hiperestaticidad, es difícil determinar *a priori* los modos de falla plásticos más significativos, en este estudio se trabaja con un modelo de análisis tridimensional simplificado y con un modelo de comportamiento mecánico que incluye varios diagramas lineales de dominio de resistencia plástica de los elementos en su plano de trabajo. Finalmente, un ejemplo ilustra la metodología.

### SUMMARY

This paper proposes a simplified methodology for the plastic seismic analysis of buildings subjected to torsion. The methodology is developed for three-dimensional (3D) structural systems composed of plane frames with elastic-perfectly-plastic behavior subjected to increasing, monotonic static seismic forces. It is difficult to define *a priori* the dominant 3D failure modes in 3D structures with a high degree of redundancy. Thus, a simplified 3D modeling where the plastic behavior of individual elements is discretized by linear diagrams in the plastic-strength domain is proposed. An example of academic interest is given to illustrate the use of the proposed method.

---

Artículo recibido el 11 de diciembre de 1996 y aprobado para su publicación el 9 de diciembre de 1997. Se aceptarán comentarios y/o discusiones al artículo hasta cinco meses después de su publicación.

*1 División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UAQ  
Centro Universitario, Cerro de las Campanas, Querétaro, Qro.  
Tel.: (91.42) 16.24.14, 15.25.12, 16.35.99 y 15.16.45  
Fax.: 15.25.12 y 15.08.98  
Email: marroyoc@sunserver.uaq.mx*

## INTRODUCCIÓN

En estructuras simples, los mecanismos o los estados potenciales de falla del sistema estructural pueden estar especificados por sus estados límite de estabilidad o de seguridad; por otro lado, unas funciones asociadas a estos estados se pueden también deducir usando el principio del trabajo virtual (Stevenson y Moses, 1970). Sin embargo, para estructuras con alto grado de redundancia e hiperestaticidad, es difícil en la práctica determinar a priori los modos de falla más significativos. En el estado actual de conocimientos, los modelos de comportamiento mecánico utilizados en los análisis de confiabilidad de sistemas estructurales, con comportamiento elastoplástico, pueden considerar diferentes dominios de resistencia (o funciones de resistencia límite de fluencia) con o sin la interacción de los esfuerzos en los elementos estructurales. La verdadera dificultad se encuentra en la identificación de todos los estados de falla posibles del sistema estructural considerado, en la obtención de expresiones que los representen y en poder determinar los índices de confiabilidad asociados a estos estados (Arroyo, 1989).

En este trabajo, el procedimiento para la obtención de las funciones de estado límite de cedencia plástica de los elementos consta de dos etapas: 1) linealización de la función de resistencia límite de plasticidad o de fluencia de una sección extrema del elemento; y 2) cálculo de la función de estado de seguridad límite del elemento, expresada como una combinación lineal de fuerzas nodales de resistencia y cargas aplicadas. En estas funciones de estado límite, se puede considerar la fluencia del material por la combinación o no de los esfuerzos.

Para la identificación de los mecanismos o estados límite de falla plástica del sistema estructural, se propone un análisis cuasi-estático paso a paso, con carga constante, degradación de la estructura y fuerzas nodales equivalentes (Thoft-Christensen y Murotsu, 1986). Este procedimiento es similar a un análisis paso a paso con carga monótona creciente, con la gran

ventaja de poder identificar además del mecanismo o estado crítico de falla, otros posibles mecanismos o estados de falla y deducir fácilmente las funciones de estado límite del sistema, asociadas a esos mecanismos. Los incrementos de carga necesarios para ir plastificando las secciones críticas a cada paso del análisis y la carga crítica de falla parcial o global de la estructura, se va deduciendo a través de las funciones de estado límite de las secciones críticas y potencialmente plastificables (de los elementos sobrevivientes), en cada etapa del análisis.

Las hipótesis que se hacen son las siguientes: a) los elementos estructurales se consideran rectos y homogéneos, y sólo existen cargas concentradas en sus extremos, b) el comportamiento mecánico del material se supone perfectamente elastoplástico, c) una sección del elemento cede o se plastifica cuando la función de estado de seguridad se anula, d) las secciones críticas aparecen sólo en los extremos de los elementos, dadas las características anteriores y, e) el cambio de geometría se considera despreciable.

Así, un estado de falla plástica del sistema estructural se identifica a través de una serie de secciones plastificadas, separadas por etapas de comportamiento lineal del sistema estructural. Cabe aclarar que cuando la plastificación se produce por pura flexión en una sección de un elemento, se puede modelar la cedencia del material en esa sección a través de una articulación física real y el estado límite de falla plástica del sistema estructural, producido por este tipo de plastificaciones, se puede representar a través del mecanismo producido en el sistema; sin embargo, cuando la plastificación se produce por interacción de esfuerzos se identifica sólo la sección plastificada y se modela analíticamente el nuevo comportamiento del elemento y del sistema. Las funciones de estado límite, que representan el estado de plastificación parcial o total del sistema estructural, se van obteniendo paso a paso, con carga monótona creciente y a través de las secciones de los elementos críticos. Finalmente, la metodología se ilustra con un ejemplo de aplicación.

## MÉTODO DE ANÁLISIS TRIDIMENSIONAL SIMPLIFICADO PARA EDIFICIOS

Los análisis lineales de sistemas estructurales tridimensionales, tipo edificios urbanos construidos a base de marcos planos y sometidos a fuerzas sísmicas estáticas, se pueden simplificar si se considera que las losas de los niveles del edificio se comportan como diafragmas infinitamente rígidos ante cargas horizontales y se mueven como cuerpos rígidos. Los marcos que conforman la estructura se modelan y analizan como marcos planos trabajando en su plano (Damy y Alcocer, 1987).

Sea un sistema estructural tipo edificio formado por  $nm$  marcos planos. El procedimiento implica ensamblar convenientemente la matriz de rigidez de cada marco plano  $K_j$  ( $j = 1, 2, \dots, nm$ ) que conforma el edificio, de tal manera que las rigideces ante los desplazamientos horizontales  $\{D_2\}$  ocupen las últimas posiciones de dicha matriz. Así se puede obtener una matriz de rigidez lateral, condensando la matriz  $K_j$  como sigue. Sea el sistema de ecuaciones de equilibrio estático del marco  $j$ :

$$\begin{Bmatrix} \{F_1\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}_j = \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{F_2\} \end{Bmatrix}_j = [K]_j \{D\}_j = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}_j \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}_j \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \{0\} &= [K_{11}]\{D_1\} + [K_{12}]\{D_2\} \\ \{F_2\} &= [K_{21}]\{D_1\} + [K_{22}]\{D_2\} \end{aligned}$$

donde las únicas fuerzas de interés, que actúan en el marco  $j$ , son las fuerzas horizontales  $\{F_2\}$ . Despejando el valor de  $\{D_2\}$  de la primera ecuación y substituyéndolo en la segunda ecuación del sistema de ecuaciones (1), se tiene:

$$\begin{aligned} \{F_2\}_j &= [[K_{22}] - [K_{21}][K_{11}]^{-1}[K_{12}]]_j \{D_2\}_j = \\ &= [K_D]_j \{D_2\}_j = [K_D]_j \{D\}_j \end{aligned} \quad (2)$$

Por continuidad, los desplazamientos horizontales (en cada nivel  $i$ ) de cualquier marco  $j$ , en dirección a su plano de referencia,  $\{D\}_j$ , se pueden obtener en función de los desplazamientos de las losas, referenciados a un sistema global (figura 1):

$$\{D\}_j = [[\cos][\text{sen}][r]]_j \begin{Bmatrix} \{\Delta_x\} \\ \{\Delta_y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} = [T]_j \{\Delta\} \quad (3)$$

donde  $[\cos]$  es una matriz diagonal con elementos iguales a los cosenos de  $\alpha_j$ ,  $[\text{sen}]$  es una matriz diagonal con elementos iguales a los senos de  $\alpha_j$  y  $[r]$  una matriz diagonal con elementos iguales a  $r_j$ , que son las distancias euclidianas del eje del marco al origen,  $\alpha_j$  es el ángulo de orientación del eje del marco  $j$  con respecto al eje  $x$  del sistema de referencia global de la estructura,  $\{\Delta_x\}$ ,  $\{\Delta_y\}$  y  $\{\theta\}$  son los desplazamientos de las losas en cada nivel  $i$ . Substituyendo los desplazamientos de la ecuación (3) en (2) se tiene:

$$\{F_2\}_j = [K_D]_j \{D\}_j = [K_D]_j [T]_j \{\Delta\} \quad (4)$$

De manera similar, el vector de fuerzas resultantes aplicado en cada una de las losas de la estructura se puede obtener en función de los vectores de fuerzas horizontales aplicados en cada uno de los marcos  $j$ , por equilibrio estático de fuerzas:

$$\{F\} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{F_2\}_j \quad (5)$$

donde  $\{F\}$  representa también el vector de fuerzas sísmicas aplicado al sistema estructural. Substituyendo el valor de las fuerzas de la ec. (4) en la ec. (5) se obtiene (Damy y Alcocer, 1987):

$$\begin{aligned} \{F\} &= \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T [K_D]_j [T]_j \{\Delta\} = \begin{Bmatrix} \{F_x\} \\ \{F_y\} \\ \{M_z\} \end{Bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} [k_{xx}] & [k_{xy}] & [k_{x\theta}] \\ [k_{yx}] & [k_{yy}] & [k_{y\theta}] \\ [k_{\theta x}] & [k_{\theta y}] & [k_{\theta\theta}] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{\Delta_x\} \\ \{\Delta_y\} \\ \{\theta\} \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (6)$$

donde el orden de los arreglos depende del número de niveles, y

$$\begin{aligned} [k_{xx}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j \cos^2 \alpha_j \\ [k_{xy}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j \cos \alpha_j \sin \alpha_j = [k_{yx}] \\ [k_{x\theta}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j \cos \alpha_j r_j = [k_{\theta x}] \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} [k_{yy}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j \sin^2 \alpha_j \\ [k_{y\theta}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j \sin \alpha_j r_j = [k_{\theta y}] \\ [k_{\theta\theta}] &= \sum_{j=1}^{nm} [K_D]_j r_j^2 \end{aligned} \quad (7)$$

Para la obtención de las fuerzas de diseño de acuerdo con el Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal vigente, es necesario determinar la excentricidad entre el centro de torsión y el centro de cortante. Para determinar esta excentricidad se obtiene primero el centro de torsión. Si el sismo actúa en la dirección "x" (ver ec. (6)) y bajo la consideración de que las fuerzas están aplicadas en el centro de torsión para no provocar giros en las losas, se puede plantear el sistema de ecuaciones de equilibrio siguiente (propuesto inicialmente por Dany y Alcocer, 1987):

$$\begin{aligned} \{F_x\} &\neq \{0\}, \quad \{F_y\} = \{0\} \text{ y } \{\theta\} = \{0\} \\ \{F_x\} &= [k_{xx}]\{\Delta_x\} + [k_{xy}]\{\Delta_y\} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\{F_y\} = \{0\} = [k_{yx}]\{\Delta_x\} + [k_{yy}]\{\Delta_y\}$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones anterior, ec. (8), se obtienen los desplazamientos  $\{\Delta_x\}$  y  $\{\Delta_y\}$ . Con estos valores se pueden obtener los momentos que hay que aplicar a cada losa para que no giren, utilizando la tercera ecuación de equilibrio (ver ec. (6)):

$$\{M_z\} = [k_{\theta x}]\{\Delta_x\} + [k_{\theta y}]\{\Delta_y\} \quad (9)$$

La distancia " $y_{CTi}$ " del centro de torsión para cada nivel se obtiene como:

$$y_{CTi} = \frac{M_{oi}}{F_{xi}} \quad (10)$$

Procediendo de la misma manera para el sismo en la dirección "y", la distancia  $x_{CTi}$  del centro de torsión para cada nivel  $i$  es:

$$x_{CTi} = \frac{M_{oi}}{F_{yi}}, \quad \text{para } \{F_x\} = \{0\}, \{F_y\} \neq \{0\} \text{ y } \{\theta\} = \{0\} \quad (11)$$

El centro de masa de cada nivel  $i$  ( $x_{CMi}$  e  $y_{CMi}$ ) normalmente coincide con el centro de área, que se puede obtener por primeros momentos. Conocidos la fuerza  $F_k$  y el centro de masa de cada nivel, se pueden obtener los

centros de cortante, aplicando equilibrio estático de momentos equivalentes en cada entrepiso:

$$x_{CCI} = \frac{\sum_{k=1}^{nn} F_k x_{CMk}}{V_i}, \quad y_{CCI} = \frac{\sum_{k=1}^{nn} F_k y_{CMk}}{V_i}, \quad V_i = \sum_{k=1}^{nn} F_k \quad (12)$$

donde  $nn$  es el número de niveles de la estructura y  $V_i$  el cortante del  $i$ -ésimo entrepiso. Las excentricidades se obtienen de las diferencias entre los centros de cortante y de torsión.

### CRITERIOS DE ESTADOS LÍMITE DE FALLA PLÁSTICA DE ELEMENTOS ESTRUCTURALES

Sea una estructura compuesta de  $n$  elementos y  $m$  número de nodos, sujeta a  $3m$  cargas concentradas en los nodos (o bien,  $6m$  para el caso de estructuras en el espacio); las secciones extremas de las barras  $k$  están numeradas a la izquierda por  $(2t-1)$  y a la derecha por  $(2t)$ , donde  $t$  es el número del elemento (figura 2).

Los análisis de la estructura se hacen aplicando el método de las rigideces. Con el afán de ilustrar mejor la metodología (en la determinación de los criterios de estados límite falla de los elementos); se muestra primero el caso particular de un elemento sometido a flexión pura, después unos casos más generales aplicados a un elemento en el plano sometido a esfuerzos combinados de flexión y carga axial, y un elemento en el espacio sometido a esfuerzos combinados de flexión en dos direcciones y carga axial. Se hace la observación que el método es válido para cualquier combinación de fuerzas.

#### *Criterio de estado límite de falla plástica de un elemento en el plano sometido a flexión pura*

Las fuerzas internas  $S_k$  en el extremo  $k$  de un elemento están dadas por:

$$S_k = \sum_{j=1}^{3m} b_{kj} L_j \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (13)$$

donde  $L_j$  son las cargas aplicadas y  $b_{kj}$  unos coeficientes función de las propiedades geométricas y mecánicas de los elementos. Los

momentos plásticos límites de flexión en el plano de trabajo de las zonas críticas del elemento son:

$$M_{p_k} = R_k = Z_{ok} \sigma_{yk} \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (14)$$

donde  $Z_{ok}$  y  $\sigma_{yk}$  son respectivamente el módulo de sección plástico y el esfuerzo límite elástico o de fluencia de la sección  $k$ , y  $R_k$  la resistencia límite de la sección  $k$ . La función de estado de seguridad de las secciones extremas de los elementos así como el criterio de estado límite de falla plástica de una sección, están dadas respectivamente por:

$$Z_k = R_k - \text{signo}(S_k) S_k \geq 0 \quad (k = 1, 2, \dots, 2n) \quad (15)$$

$$Z_i = 0 \quad (16)$$

$$\text{donde: } \text{signo}(S_k) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_k \geq 0 \\ -1 & \text{si } S_k < 0 \end{cases}$$

Con el fin de realizar los análisis estructurales con el mismo número de nodos del sistema, en cada plastificación de una sección crítica, se pueden deducir una matriz de rigidez reducida correspondiente al elemento dañado o plastificado y un vector de fuerzas nodales equivalente. Cuando se forma una articulación plástica en el extremo izquierdo ( $2t-1$ ) del elemento  $t$ , la matriz de rigideces de un elemento a flexión empotrado en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigideces reducida de un elemento a flexión, articulado a la izquierda y empotrado a la derecha (Thoft-Christensen y Murotsu, 1986) y en los nodos extremos del  $t$ -ésimo elemento se aplica un vector  $\{f_i\}$  de fuerzas nodales equivalentes (figura 3):

$$\{f_i\} = \begin{Bmatrix} 0, \frac{3M_{p(2t-1)}}{2l_t}, M_{p(2t-1)}, 0, - \\ -\frac{3M_{p(2t-1)}}{2l_t}, \frac{M_{p(2t-1)}}{2} \end{Bmatrix} \quad (17)$$

donde  $M_p$  es el momento plástico resistente del extremo izquierdo del elemento  $t$  y  $l_t$  es la longitud del mismo. Es decir, una vez plastificado un elemento en su extremo izquierdo, la matriz de rigidez original es reemplazada por una matriz reducida, obtenida de la suposición de que hay una articulación física real en el extremo mencionado.

De la misma manera, cuando una articulación plástica se forma en el extremo derecho ( $2t$ ) del elemento  $t$  la matriz de rigidez del elemento a flexión empotrado en ambos extremos es reemplazada por una matriz de rigidez reducida de un elemento a flexión articulado a la derecha y empotrado a la izquierda, y un vector de fuerzas nodales equivalente  $\{f_t\}$  aplicadas en los nudos extremos del  $t$ -ésimo elemento. Este vector de fuerzas es similar al vector de fuerzas de la ecuación (17), intercambiando simplemente los términos 3 y 6 de dicho vector, así como los valores de los momentos plásticos de las secciones ( $M_{p(2t)}$ ).

Finalmente, si se forma una articulación plástica en cada extremo del elemento, se tiene una matriz de rigidez reducida equivalente a un elemento biarticulado (tipo armadura) y un vector de fuerzas nodales equivalentes aplicado en los extremos:

$$\{f_i\} = \begin{Bmatrix} 0, \frac{M_{p(2t-1)} + M_{p(2t)}}{l_t}, M_{p(2t-1)}, 0, - \\ -\frac{M_{p(2t-1)} + M_{p(2t)}}{l_t}, M_{p(2t)} \end{Bmatrix} \quad (18)$$

*Criterio de estado límite de falla plástica de elementos en el plano sujetos a esfuerzos combinados*

Sean  $\{f\}$  y  $\{\delta\}$  los vectores de fuerzas y desplazamientos de nodo, de un elemento unido a los nodos  $i, j$  (figura 4):

$$\{f\} = \{N_{x_i}, V_{y_i}, M_{z_i}, N_{x_j}, V_{y_j}, M_{z_j}\} \quad y \quad (19)$$

$$\{\delta\} = \{d_{x_i}, d_{y_i}, \theta_{z_i}, d_{x_j}, d_{y_j}, \theta_{z_j}\}$$

Con el fin de tener en cuenta la interacción de las fuerzas en la condición de plasticidad, se aproxima la función de estado límite plástico por medio de una función lineal (Thoft-Christensen y Murotsu, 1986, ver figura 5):

$$Z_k = R_k - \{C_k\}^T \{f_k\} = 0 \quad (20)$$

donde  $k = i$  o  $j$  designan el extremo de la barra,  $R$  es la fuerza límite plástica resistente de referencia de la sección extrema  $k$  del elemento,  $\{C_k\}^T$  es un vector dependiente de las



propiedades geométricas de la barra y  $\{f_k\}$  es un vector de fuerzas, a que está siendo sometido el elemento en sus nudos extremos.

Para el caso de interacción entre la fuerza normal y el momento flexionante en la condición de plasticidad, el modelo mecánico de comportamiento elastoplástico, que toma en cuenta esta interacción es en principio no lineal. Sin embargo y con el fin de facilitar su aplicación, en este método se trabaja con una aproximación lineal de los diagramas del dominio de resistencia (fig. 5). Por tanto, la función de estado límite plástico puede estar dado por (Arroyo, 1989):

$$Z = 1 - \frac{|N|}{N_p} - \frac{|M|}{M_p} = 0 \quad (21)$$

Si  $Z_0$  es el módulo plástico de la sección, con un área  $A$  y  $g(\gamma)$  un factor de reducción por pandeo, la ecuación de estado límite de la sección  $k$  se puede expresar de las formas siguientes, dependiendo de la fuerza de referencia,  $M_p$  o  $N_p$  (Arroyo, 1994):

$$\begin{aligned} Z_k &= M_{p_k} - \left\{ \frac{Z_{o_k}}{g(\gamma)A} |N_k| + |M_{z_k}| \right\} = \\ &= R_k - \left\{ \frac{Z_{o_k}}{g(\gamma)A}, 0, 1 \right\} \begin{Bmatrix} N_k \\ M_{z_k} \end{Bmatrix} = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

$$Z_k = N_p - \left\{ |N_k| + \frac{g(\gamma)A}{Z_{o_k}} |M_{z_k}| \right\}$$

Si la capacidad del momento plástico se toma como la resistencia de referencia y no se toma en cuenta el efecto de pandeo ( $g(\gamma) = 1$ ), se tiene para cada elemento:

$$R_k = \sigma_{yk} Z_{ok} = M_p, \quad g(\gamma) = 1$$

$$\{C_i\} = \{Z_{oi}/A_i \text{signo}(F_{x_i}), 0, \text{signo}(M_{z_i}), 0, 0, 0\}$$

$$\{C_j\} = \{0, 0, 0, Z_{oj}/A_j \text{signo}(F_{x_j}), 0, \text{signo}(M_{z_j})\} \quad (23)$$

Para la interacción entre el momento flexionante y la fuerza axial, considerando el efecto de pandeo, se reemplaza  $A_k$  por  $A_{ck}$  en los

vectores  $\{C_i\}$  y  $\{C_j\}$  de las ecuaciones anteriores (23). Donde  $A_{ck} = g(\gamma) A_k$  y  $g(\gamma)$  es un factor de reducción propuesto por Galambos y Ravindra (1973). En esta función de estado límite de resistencia modificada, representada en la misma figura 5 con una línea punteada, se utilizan los vectores  $C_k$  siguientes:

$$\{C_i\} = \{Z_{oi}/A_{ci} \text{signo}(F_{x_i}), 0, \text{signo}(M_{z_i}), 0, 0, 0\}$$

$$\{C_j\} = \{0, 0, 0, Z_{oj}/A_{cj} \text{signo}(F_{x_j}), 0, \text{signo}(M_{z_j})\} \quad (24)$$

*Criterio de estado límite de falla plástica de elementos en el espacio, sujetos a esfuerzos combinados*

Sean  $\{f\}$  y  $\{\delta\}$  los vectores de fuerzas y desplazamientos de nodo de un elemento en el espacio, asociados a los nodos  $i, j$  (figura 6):

$$\begin{aligned} \{f\} &= \{N_{x_i}, V_{y_i}, V_{z_i}, M_{x_i}, M_{y_i}, M_{z_i}, N_{x_j}, V_{y_j}, \\ &V_{z_j}, M_{x_j}, M_{y_j}, M_{z_j}\} \end{aligned} \quad (25)$$

$$\{\delta\} = \{d_{x_i}, d_{y_i}, d_{z_i}, \theta_{x_i}, \theta_{y_i}, \theta_{z_i}, d_{x_j}, d_{y_j}, d_{z_j}, \theta_{x_j}, \theta_{y_j}, \theta_{z_j}\}$$

Si se considera sólo la interacción entre los momentos flexionantes y la fuerza axial, para el caso de elementos en el espacio y tomando la resistencia del momento plástico sobre el eje  $z$  como la resistencia de referencia (figura 7), se tiene:

$$\begin{aligned} \{C_i\} &= \left\{ \frac{Z_{zi}}{A_i} \text{signo}(F_{x_i}), 0, 0, 0, \frac{Z_{yi}}{Z_{yi}} \text{signo}(M_{y_i}), \right. \\ &\left. \text{signo}(M_{z_i}), 0, 0, 0, 0, 0 \right\} \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} \{C_j\} &= \left\{ 0, 0, 0, 0, 0, 0, \frac{Z_{zi}}{A_j} \text{signo}(F_{x_j}), \right. \\ &\left. 0, 0, 0, \frac{Z_{yi}}{Z_{yi}} \text{signo}(M_{y_j}), \text{signo}(M_{z_j}) \right\} \end{aligned}$$

donde  $Z_{zi}$  y  $Z_{yi}$  son respectivamente los módulos de sección plásticos sobre el eje "z" y "y".

Otros casos pueden también ser definidos, dependiendo de las fuerzas de interés y del conocimiento que se tenga del comportamiento mecánico del elemento, sujeto a la interacción de esfuerzos deseados.

### OBTENCIÓN DE LA MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE Y FUERZAS EQUIVALENTES

La relación entre el vector de fuerzas nodales y el vector de desplazamientos para un elemento con comportamiento lineal es:

$$\{f_i\} = [k_i] \{\delta_i\} \quad (27)$$

donde  $[k_i]$  es una matriz de rigidez elástica del elemento  $i$ . Cuando la condición de plasticidad ha sido alcanzada en un elemento, el desplazamiento total  $\{\delta_i\}$  es la suma de un desplazamiento elástico y un desplazamiento plástico:

$$\{\delta_i\} = \{\delta_i^e\} + \{\delta_i^p\} = \{\delta_i^e\} + \{\delta_i^p\} + \{\delta_j^p\} \quad (28)$$

donde  $\{\delta_i^e\}$  es el desplazamiento elástico,  $\{\delta_i^p\}$  el desplazamiento plástico,  $\{\delta_i^p\}$  y  $\{\delta_j^p\}$  son respectivamente los desplazamientos plásticos en los extremos  $i$  y  $j$  del elemento. A partir de la teoría de deformación plástica (o de la ley de fluencia plástica), la deformación plástica se puede expresar como (Thoft-Christensen y Murotsu, 1986):

$$\{\delta_i^p\} = \lambda_i \frac{\partial Z_i(\{f_i\})}{\partial \{f_i\}} = -\lambda_i \{C_i\}, \quad (29)$$

$$\{\delta_j^p\} = \lambda_j \frac{\partial Z_j(\{f_j\})}{\partial \{f_j\}} = -\lambda_j \{C_j\}$$

donde  $\lambda_i$  y  $\lambda_j$  son factores que indican la magnitud de la deformación plástica. Las fuerzas nodales  $\{f_i\}$  pueden entonces expresarse como:

$$\begin{aligned} \{f_i\} &= [K_i] \{\delta_i\} = [K_i] (\{\delta_i\} - \{\delta_i^p\}) \\ &= [K_i] (\{\delta_i\} - \{\delta_i^p\} - \{\delta_j^p\}) \end{aligned} \quad (30)$$

Sustituyendo los valores de las deformaciones plásticas, ecuación (29), en la ecuación (30), se tiene:

$$\begin{aligned} \{f_i\} &= [K_i] \{\delta_i\} + [K_i] \{C_i\} \lambda_i + [K_i] \{C_j\} \lambda_j \\ &= [K_i] \{\delta_i\} + \begin{bmatrix} [K_i] \{C_i\} & [K_i] \{C_j\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

$$= [K_i] \{\delta_i\} + [H]^T \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} \quad (31)$$

Sustituyendo los valores de  $\{f_i\}$  de la ec. (31), en la ecuación de estado límite (ec. (20)) y arreglando convenientemente los términos, se deduce lo siguiente:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \{C_i\}^T [K_i] \{C_i\} & \{C_i\}^T [K_i] \{C_j\} \\ \{C_j\}^T [K_i] \{C_i\} & \{C_j\}^T [K_i] \{C_j\} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} &= \\ &= \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} - \begin{bmatrix} \{C_i\}^T [K_i] \\ \{C_j\}^T [K_i] \end{bmatrix} \{\delta_i\} \end{aligned} \quad (32)$$

Renombrando los términos de la ecuación anterior (32) y despejando el vector  $\{\lambda\}$  se encuentra que:

$$\begin{aligned} [G] \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} - [H] \{\delta_i\} \quad y \\ \begin{Bmatrix} \lambda_i \\ \lambda_j \end{Bmatrix} &= -[G]^{-1} [H] \{\delta_i\} + [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (33)$$

Finalmente, sustituyendo el vector  $\{\lambda\}$  de la ecuación (33), en la ecuación (31) y reordenando términos, se obtiene:

$$\begin{aligned} \{f_i\} - [H]^T [G]^{-1} \begin{Bmatrix} R_i \\ R_j \end{Bmatrix} &= \left[ [K_i] - [H]^T [G]^{-1} [H] \right] \{\delta_i\} \\ \{f_i\} - \{f_i^p\} &= [K_i^p] \{\delta_i\} \end{aligned} \quad (34)$$

donde  $[K_i^p]$  es una matriz de rigidez reducida del elemento  $i$ , con los dos extremos plastificados y  $\{f_i^p\}$  el vector de fuerzas residuales nodales equivalentes con signo opuesto. Cabe señalar que tanto la matriz de rigidez tangente reducida como el vector de fuerzas residuales equivalente, dependen sólo de la matriz de rigidez lineal inicial del elemento y de los vectores  $\{C_k\}$ . Por otro lado, si sólo la sección extrema izquierda ( $i$ ) del elemento cede o se plastifica, la expresión anterior se simplifica de tal manera que:

$$\lambda_i = \frac{R_i - \{C_i\}^T [K_i] \{\delta_i\}}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}}; \quad \lambda_j = 0$$

$$[K_i^{(p)}] = [K_i] - \frac{[K_i] \{C_i\} \{C_i\}^T [K_i]}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}} \quad y$$

$$\{f_i^p\} = \frac{R_i [K_i] \{C_i\}}{\{C_i\}^T [K_i] \{C_i\}} \quad (35)$$

Finalmente, si sólo la sección del extremo derecho  $j$  del elemento se plastifica, se tienen

las mismas ecuaciones que las ecs. (35), cambiando únicamente los índices (*i*) por (*j*).

### **CRITERIO DE ESTADO LÍMITE DE FALLA PLÁSTICA DE SISTEMAS ESTRUCTURALES**

La idea básica para analizar sistemas estructurales paso a paso, con comportamiento elastoplástico, sometidos a carga monótona creciente (o siguiendo un trayecto de carga monótona creciente), partiendo de un estado inicial conocido; consiste en calcular la solución en el instante  $t + dt$ , dada la solución en el instante  $t$ . La determinación de los incrementos de esfuerzos, deformaciones y desplazamientos se hacen a partir de los incrementos de carga, haciendo uso de las ecuaciones de equilibrio casi estático, de las condiciones límite, de las condiciones de compatibilidad geométrica de deformaciones y de la ley de comportamiento. Está claro que para esta determinación, se necesita conocer en cada instante  $t$ , la localización de los elementos plastificados (criterio alcanzado) y los no plastificados, y decidir para cada uno de los elementos plastificados, si durante el paso  $t + dt$  hay carga o descarga. En esto reside en general toda la dificultad de solución del problema de elastoplasticidad casi-estático.

Este procedimiento se puede sistematizar (bajo las hipótesis ya mencionadas en la introducción de este trabajo) de la manera como a continuación se describe:

- a) Partiendo de un estado inicial de estabilidad de la estructura, donde todos los elementos tienen comportamiento lineal, se identifica la sección o el elemento más esforzado, a partir de la función de estado límite del elemento, expresada como una combinación lineal de resistencias y cargas aplicadas; además, se puede determinar el incremento de carga necesario para llegar a su estado límite de resistencia o de fluencia del material. Una vez identificado el elemento más esforzado, se determina la matriz de rigidez reducida del elemento correspondiente y el vector de fuerzas de resistencia nodal equivalente;

- b) Se realiza un nuevo análisis lineal del sistema estructural, con una matriz de rigidez reducida o degradada del sistema, que ensambla tanto las matrices de rigidez de los elementos plastificados como los elementos aún no plastificados, y sujeta a una condición de carga que incluye las cargas iniciales y las fuerzas nodales equivalentes producto de las resistencias constantes de los elementos plastificados. Se identifica una nueva plastificación, a partir de la función de estado límite de la sección más esforzada. Se calcula una nueva matriz de rigidez reducida y un vector de fuerzas de resistencia equivalente del elemento plastificado;

- c) Se repite el paso "b", hasta alcanzar un estado límite de falla plástica del sistema estructural o hasta identificar un mecanismo de falla plástica del sistema estructural. Para el caso particular de elementos que se plastifican por cedencia a flexión pura, el estado límite del sistema estructural está definido por la formación de un mecanismo en la estructura que puede producir el colapso parcial o total de la misma.

Para el caso más general de plastificación del material por interacción de esfuerzos, el criterio de estado límite de falla plástica del sistema estructural puede ser dado como a continuación se describe. Considérese un sistema estructural de  $n$  elementos y al menos  $lm$  cargas (donde  $l$  es el número de grados de libertad del nudo y  $m$  el número de nudos cargados), los extremos de las barras se numeran en serie y el criterio de estado límite de falla plástica de un elemento está dado por (Thoft-Christensen y Murotsu, 1986, ver ecuación (20)):

$$Z_i = R_i - \{C_i\}^T \{f_i\} = 0 \quad (36)$$

Si las secciones en los extremos de las barras  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$ , han cedido, se realiza una vez más el análisis estructural del sistema, utilizando las matrices de rigidez reducidas de los elementos dañados y las fuerzas de nudo equivalentes correspondientes, ecuaciones (34) y (35). Una vez ensamblada la matriz de rigidez global de la estructura, se establece la ecuación de equilibrio del sistema:



$$[K]^{(p)}\{d\} = \{L\} + \{F\}^{(p)} \quad (37)$$

donde  $\{d\}$  es el vector de desplazamientos totales en coordenadas globales,  $[T]$  es la matriz de transformación de coordenadas,  $[L]$  es el vector de cargas externas en los nodos,

$$[K]^{(p)} = \sum_{i=1}^n [T_i]^T [K_i]^{(p)} [T_i] \quad (38)$$

es la matriz de rigidez global reducida de la estructura, la sumatoria indica en esta ecuación ensamble de matrices, y

$$\{F\}^{(p)} = - \sum_{i=1}^n [T_i] \{f_i\}^{(p)} \quad (39)$$

es un vector de fuerzas equivalentes de nudo, en coordenadas globales. La obtención de los desplazamientos del sistema de ecuaciones (37), se puede indicar como sigue:

$$\{d\} = [[K]^{(p)}]^{-1} \{\{L\} + \{F\}^{(p)}\} \quad (40)$$

El vector de desplazamientos  $\{d_t\}$  de la  $t$ -ésima barra, en coordenadas globales, está entonces dado por:

$$\{d_t\} = [[K_t]^{(p)}]^{-1} \{\{L\} + \{F\}^{(p)}\} \quad (41)$$

donde  $[[K_t]^{(p)}]^{-1}$  es la matriz formada por la extracción de las líneas de la matriz global de la estructura  $[[K]^{(p)}]^{-1}$ , correspondientes a los grados de libertad del vector  $\{d_t\}$ . Dado que los vectores de desplazamientos en coordenadas locales y globales ( $\{\delta_t\}$  y  $\{d_t\}$  respectivamente) están relacionados a través de una matriz de transformación ( $\{\delta_t\} = [T]\{d_t\}$ ), el vector de fuerzas nodales  $\{f_t\}$  del  $t$ -ésimo elemento puede expresarse como:

$$\{f_t\} = [b_t]^{(p)} \{\{L\} + \{F\}^{(p)}\} + \{f_t'\}^{(p)} \quad (42)$$

donde:

$$[b_t]^{(p)} = [K_t]^{(p)} [T_t] [[K_t]^{(p)}]^{-1} \quad (43)$$

El estado límite de falla plástica del sistema estructural se obtiene cuando un número determinado de elementos alcanzan la plastificación en sus extremos, rebasando un cierto valor  $p$  (estas secciones están numeradas,  $r_1, r_2, \dots, r_p$ ) y cuando la matriz de rigidez

global reducida de la estructura  $[K]^{(p)}$  o el vector de desplazamientos globales  $\{d\}^{(p)}$ , satisfacen una de las siguientes condiciones:

$$\frac{DET[K]^{(p)}}{DET[K]^{(0)}} \leq \varepsilon_1; \quad \frac{\|\{d\}^{(0)}\|}{\|\{d\}^{(p)}\|} \leq \varepsilon_2 \quad (44)$$

donde  $(p)$  y  $(0)$  denotan respectivamente la etapa de falla  $p$ -ésima y la condición inicial,  $\|\bullet\|$  es la norma euclidiana,  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son unas constantes que determinan la etapa de estado límite de falla plástica del sistema estructural.

### FUNCIONES DE ESTADO LÍMITE DE FALLA PLÁSTICA DE SISTEMAS ESTRUCTURALES

La función de estado límite de falla plástica de un sistema estructural se puede obtener después de que se forma una serie de plastificaciones  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$ , donde las matrices de rigidez de los elementos dañados se reemplazan por matrices de rigidez reducidas y unas fuerzas residuales se aplican en los nudos del sistema como fuerzas residuales nodales equivalentes. En estas condiciones se efectúa un último análisis del sistema, donde las fuerzas internas demandadas en los elementos restantes se pueden representar como (ver ecuación (42)):

$$\begin{aligned} \{f_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)}\} &= [b_i]^{(p)} \{\{L\} + \{F\}^{(p)}\} + \{f_i'\}^{(p)} = \\ &= [b_i]^{(p)} \{L\} - [b_i]^{(p)} \sum_{j=1}^{p-1} [T_j] \{f_j'\}^{(p)} + \{f_i'\}^{(p)} \end{aligned} \quad (45)$$

donde  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  significa un conjunto de secciones plastificadas, arreglados por orden cronológico de aparición. Dadas las resistencias límite de los elementos sobrevivientes  $R_k$  y las fuerzas internas de la ecuación (45), las funciones de estado de seguridad de los elementos restantes pueden expresarse de la manera siguiente:

$$\begin{aligned} Z_{k(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} &= R_k - \{C_k\}^T \{f_{k(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)}\} = \\ &= R_k + \sum_{j=1}^{p-1} a_{kr}^{(p)} R_j - \sum_{i=1}^{lm} b_{ki}^{(p)} L_i \end{aligned} \quad (46)$$

donde  $b_{ki}$  y  $a_{kr}$  son unos coeficientes de influencia. Dada la ecuación anterior, se puede

observar que la función de estado límite de falla plástica del sistema estructural está asociada a las funciones de estado límite de las secciones de los elementos potencialmente plastificables. Este estado límite está definido como una función lineal de las resistencias  $R_k$  y de las cargas  $L_j$ , en la etapa  $(p)$ ; deducida a partir de las ecuaciones (20) y (42). Por tanto la función de estado límite de falla plástica del sistema estructural puede representarse como:

$$Z_{k(r_1, r_2, \dots, r_{pj-1})}^{(p)} = 0 \quad (47)$$

### ANÁLISIS ELASTOPLÁSTICO CASI-ESTÁTICO TRIDIMENSIONAL SIMPLIFICADO PARA EDIFICIOS

Para el caso particular de sistemas estructurales tridimensionales, tipo edificios (formados con marcos planos y losas rígidas), los análisis elastoplásticos casi-estáticos se pueden simplificar, considerando que las plastificaciones potenciales de los elementos se producen en el plano de trabajo de cada marco. Esta consideración permite utilizar sólo funciones de estado límite de falla plástica por interacción de esfuerzos en el plano de trabajo de los elementos; por otro lado la matriz de rigidez lateral reducida de cada marco contribuye en la degradación de la matriz de rigidez global del sistema estructural. La única dificultad de este procedimiento radica en representar y manipular las fuerzas nodales equivalentes (producto de las plastificaciones de los elementos más esforzados, en su plano de trabajo) como fuerzas equivalentes laterales, así como integrarlas en el análisis casi-estático tridimensional simplificado.

Sea un sistema estructural tridimensional tipo edificio, formado con  $nm$  número de marcos planos, donde se han plastificado  $p-1$  secciones del sistema estructural y  $pj-1$  secciones del marco  $j$ ; una vez plastificadas las secciones  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{pj-1}$  en el plano de trabajo del marco  $j$ , se puede plantear la ecuación de equilibrio estático de este marco (de manera similar a la ecuación (1)), como:

$$[K]_j^{(p)} \{D\}_j = \begin{bmatrix} [K_{11}] & [K_{12}] \\ [K_{21}] & [K_{22}] \end{bmatrix}_j^{(p)} \begin{Bmatrix} \{D_1\} \\ \{D_2\} \end{Bmatrix}_j =$$

$$= \begin{Bmatrix} \{0\} \\ \{f_{s_2}\} \end{Bmatrix}_j + \begin{Bmatrix} \{f_{R_1}\} \\ \{f_{R_2}\} \end{Bmatrix}_j^{(p)} \quad (48)$$

donde  $\{f_{s_2}\}$  es el vector de las fuerzas externas sísmicas,  $\{f_{R_1}\}$  y  $\{f_{R_2}\}$  son los vectores de las fuerzas equivalentes producto de las  $pj-1$  plastificaciones del marco  $j$ . Para reducir el sistema de ecuaciones (48), se condensa el sistema en el valor de  $\{D_2\}$ :

$$[K_{22} - K_{21}K_{11}^{-1}K_{12}]_j^{(p)} \{D_2\}_j = \{f_{s_2}\}_j + \{f_{R_2}\}_j^{(p)} - [K_{21}K_{11}^{-1}]_j^{(p)} \{f_{R_1}\}_j^{(p)} \quad (49)$$

$$[K_D]_j^{(p)} \{D\}_j = \{f_{s_2}\}_j + \{f_{LR}\}_j^{(p)} = \{f^{tot}\}_j^{(p)}$$

donde  $[K_D]_j^{(p)}$  es la matriz de rigidez lateral del marco  $j$  y  $\{f_{LR}\}_j^{(p)} = \{f_{R_2}\}_j^{(p)} - [K_{21}K_{11}^{-1}]_j^{(p)} \{f_{R_1}\}_j^{(p)}$  es un vector de fuerzas laterales equivalentes del marco  $j$ .

Aplicando equilibrio estático, se obtienen las fuerzas totales de la etapa  $p$ , aplicadas en las losas, en función de las fuerzas aplicadas en cada uno de los marcos:

$$\{F\}^{(p)} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f^{tot}\}_j^{(p)} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{s_2}\}_j + \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f_{LR}\}_j^{(p)} = \{F_S\} + \{F_{LR}\}^{(p)} \quad (50)$$

Por otro lado las fuerzas  $\{f^{tot}\}_j^{(p)}$  se pueden representar en función de los desplazamientos de las losas (ver ecuación (4)), de la manera siguiente:

$$\{F\}^{(p)} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T \{f^{tot}\}_j^{(p)} = \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^T [K_D]_j^{(p)} [T]_j \{\Delta\} = [K_T]^{(p)} \{\Delta\} \quad (51)$$

En el sistema de ecuaciones anterior (51) (similar al sistema (6)), se toma en cuenta la contribución de las fuerzas nodales equivalentes debido a las plastificaciones producidas en el plano de trabajo de cada marco. Una vez resuelto este sistema de ecuaciones para  $\Delta$  ( $\{\Delta\} = [K_T^{(p)}]^{-1} \{F\}^{(p)}$ ), se procede a obtener los desplazamientos y fuerzas laterales en cada marco (ver ecuación (49)):

$$\{D\}_j = [T]_j \{\Delta\} \quad (52)$$

$$\{f_{S_2}\}_j^p = [K_D]_j^p \{D\}_j - \{f_{LR}\}_j^p \quad (53)$$

donde  $\{f_{S_2}\}_j^{(p)}$  es un vector de fuerzas laterales, producto de la distribución de las fuerzas sísmicas aplicadas a todo el sistema estructural y de la contribución de las  $p-1$  plastificaciones producidas en todos los marcos del sistema estructural. Finalmente, este vector de carga se aplica en cada marco, para realizar los análisis elastoplásticos de cada marco en su plano de trabajo.

### FUNCIÓN DE ESTADO LÍMITE DE FALLA PLÁSTICA DE EDIFICIOS SOMETIDOS A TORSIÓN POR SISMO

Para el caso particular de un sistema estructural tipo edificio, la función de estado límite de falla plástica del sistema se obtiene, después de que se forman  $p-1$  plastificaciones en los planos de trabajo de los marcos que forman la estructura. Las matrices de rigidez de los elementos dañados se reemplazan por unas matrices de rigidez reducidas y unos vectores de fuerzas resistentes permanentes equivalentes se aplican en los nodos de la estructura. En estas condiciones se efectúa un nuevo análisis simplificado del sistema tridimensional (como se indica en la sección anterior, ver ecuación (51)), para obtener las fuerzas laterales que absorben cada uno de los marcos (ecuación (53)). Con estas fuerzas laterales, se efectúa un último análisis elastoplástico en cada uno de los marcos, donde el vector de fuerzas internas demandadas del  $t$ -ésimo elemento (aún no plastificado) del marco  $j$  es:

$$\begin{aligned} \left\{ f_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} \right\}_j &= [b_i]_j^p \{P_i\}_j^{(p)} + \{f_i'\}_j^{(p)} = \\ &= [b_i]_j^p \left\{ [e_i]_j \{F_s\} + \{F_{LR}\}_j^{(p)} - \{f_{LR}\}_j^{(p)} \right\} + \{f_i'\}_j^{(p)} = \\ &= [b_i]_j^p [e_i]_j \{F_s\} - [b_i]_j^p [e_i]_j \sum_{j=1}^{nm} [T]_j^p \{f_{LR}\}_j^p - \\ &- [b_i]_j^p \{f_{LR}\}_j^{(p)} + \{f_i'\}_j^{(p)} \end{aligned} \quad (54)$$

donde  $r_1, r_2, r_3, \dots, r_{p-1}$  significan las  $p-1$  secciones plastificadas en la estructura, en la etapa  $p$ ,  $nm$  es el número de marcos,  $\{P_i\}_j^{(p)}$  es

el vector de cargas laterales totales, aplicado al marco  $j$  resultante de la distribución de cargas laterales del sistema (ecuación (53)),  $\{F_s\}$  el vector de fuerzas laterales sísmicas del sistema,  $\{F_{LR}\}^{(p)}$  el vector de fuerzas laterales equivalentes del sistema (en coordenadas globales del sistema estructural), producto de las plastificaciones en todos los marcos del edificio,  $\{f_{LR}\}_j^{(p)}$  el vector de fuerzas laterales equivalentes producto de las plastificaciones en el marco  $j$ ,  $\{f_i'\}_j^{(p)}$  las fuerzas nodales equivalentes producto de las plastificaciones del propio marco,

$$[e_i]_j^{(p)} = [K_D]_j^{(p)} [T]_j [[K_T]_j^{(p)}]^{-1} \text{ y}$$

$$[b_i]_j^{(p)} = [K_i]_j^{(p)} [T_i] [[K_i]_j^{(p)}]^{-1}.$$

En la ecuación (54) se observa que una parte de las fuerzas internas del marco  $j$  dependen de las fuerzas resistentes equivalentes de las  $pj-1$  plastificaciones del marco  $j$  de interés; por otro lado, dependen también de las fuerzas resistentes laterales equivalentes de las  $p-1$  plastificaciones de todos los marcos (incluyendo las plastificaciones del propio marco  $j$ ) y de las fuerzas laterales sísmicas externas aplicadas al sistema. Estas fuerzas se distribuyen en cada marco a través de un análisis estático tridimensional simplificado.

Dadas las resistencias límite  $R_i$ , de los elementos del marco  $j$  y las fuerzas internas demandadas de la ecuación (54), las funciones de estado de seguridad de los elementos restantes (aún no plastificados) pueden expresarse como:

$$\begin{aligned} Z_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} &= R_i - \{C_i\}_j^T \left\{ f_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} \right\}_j = \\ &= R_i + \sum_{k=1}^{pj-1} c_{ik}^{(p)} R_{ik} + \sum_{m=1}^{p-1} a_{im}^{(p)} R_{im} - \sum_{l=1}^{ne} d_{il}^{(p)} F_{sl} \end{aligned} \quad (55)$$

donde  $a_{im}^{(p)}$ ,  $c_{ik}^{(p)}$  y  $d_{il}^{(p)}$  son unos coeficientes de influencia (que dependen de las propiedades geométricas y mecánicas de los elementos del marco  $j$ ), que relacionan las fuerzas internas de la sección  $i$  de un elemento con las fuerzas externas aplicadas al marco  $j$ ,  $F_{sl}$  son las fuerzas sísmicas laterales aplicadas al marco  $j$  (después que las secciones  $r_1, r_2, \dots, r_{p-1}$  del sistema se han plastificado), durante la etapa  $(p)$ ,  $ne$  es el número de niveles del edificio,  $R_{im}$  las resistencias límite asociadas a las  $p-1$  plastificaciones del sistema estructural,  $R_{ik}$  las resis-

tencias límite, asociadas a las  $pj-1$  plastificaciones del marco  $j$ .

Dada la ecuación anterior, se puede observar que la función de estado límite de falla plástica del sistema estructural está asociada a las funciones de estado límite de las secciones de los elementos potencialmente plastificables. Este estado límite está definido como una función lineal de las resistencias  $R_i$  y de las cargas  $F_{sl}$ , en la etapa  $(p)$ , deducida a partir de las ecuaciones (20) y (54). Por tanto, la función de estado límite de falla plástica del sistema estructural puede representarse como:

$$Z_{i(r_1, r_2, \dots, r_{p-1})}^{(p)} = 0 = R_i + \sum_{k=1}^{pj-1} c_{ik}^{(p)} R_{ik} + \sum_{m=1}^{p-1} a_{im}^{(p)} R_{im} - \sum_{l=1}^{nc} d_{il}^{(p)} F_{sl} \quad (56)$$

### EJEMPLO, EDIFICIO DE ACERO DE TRES NIVELES

El objetivo de este ejemplo es ilustrar la metodología expuesta en este trabajo, identificando algunos estados límite de falla plástica de un sistema estructural dado, sometido a torsión por fuerzas sísmicas estáticas. Se hace la observación que las fuerzas sísmicas estáticas, para análisis lineal estático de acuerdo con el RC-DF, se pueden reducir con fines de diseño a través del factor de comportamiento  $Q$ , que toma en cuenta la capacidad de la estructura de disipación de energía cuando sobrepasa el intervalo de comportamiento elástico (Meli, 1991). Por lo anterior, en este ejemplo se trabaja con la fuerza sísmica correspondiente al coeficiente básico de diseño (con  $Q = 1$ ), como condición de carga inicial, y se analiza el comportamiento elastoplástico de la estructura. De manera similar, en este tipo de análisis elastoplásticos no se toma en cuenta la excentricidad recomendada por el RC-DF para fines de diseño, ya que por un lado las fuerzas sísmicas estáticas no se están afectando por el factor de comportamiento sísmico  $Q$ , además muchos de los elementos incursionan en el rango de falla plástica; por otro lado, las incertidumbres en la resistencia del material, en el comportamiento del sistema estructural, en la magnitud y dirección de las fuerzas, entre otras, se pueden modelar y tomar en cuenta

en las variables que integran la función de estado límite de falla plástica del sistema, considerándolas como variables aleatorias, así como realizando análisis de confiabilidad del sistema. Finalmente, ni el método propuesto, ni el ejemplo de aplicación pretenden dar una respuesta absoluta y exhaustiva, así como una solución general del comportamiento de este tipo de estructuras tipo edificios, sometidos a torsión por sismo; sino proponer una metodología simplificada para fines prácticos, que permita identificar (como primera aproximación) un límite inferior en el acotamiento del comportamiento de este tipo de estructuras sometidas a torsión por sismo.

Sea una estructura tipo edificio de acero de tres niveles, formada por seis marcos planos mostrada en la figura 8, cuya planta se muestra en la figura 9. Se suponen sólo dos tipos de elementos (las columnas y las trabes), con mismas características geométricas y mecánicas para cada uno de ellos. Dado que la estructuración y la topología de todos los marcos son similares, se muestra únicamente un marco tipo en la figura 10. En la tabla 1 se muestran las características geométricas y mecánicas de los elementos de acero. La estructura se somete a fuerzas sísmicas obtenidas con el método estático propuesto al Reglamento de Construcciones del DF (esta fuerza se aplica en los centros de masa), considerando un peso de 180 t en los dos primeros niveles y 135 t en el tercer nivel, un coeficiente sísmico para terreno blando,  $c = 0.4$ , y un factor de comportamiento  $Q = 1$ . Estas fuerzas se muestran en la tabla 2.

Se consideran cinco combinaciones de carga sísmica: en la primera condición de carga se aplica sólo 100 % de la fuerza sísmica en la dirección X, en la segunda y tercera condiciones de carga se aplica 100 % de la fuerza sísmica en la dirección X y un 30 % adicional de esta fuerza en la dirección Y, en sentido positivo y negativo respectivamente; en las combinaciones de carga 4 y 5 se aplica el 100 % de la carga en la dirección Y y 30 % en los dos sentidos de X, respectivamente. Las direcciones de las combinaciones de fuerzas se muestran en la figura 11, y sus respectivos valores se muestran en la tabla 3, para cada nivel del edificio.



Por simplicidad, en este ejemplo se considera que los elementos estructurales se plastifican sólo por el efecto de la flexión, dado por un lado que las masas o los pesos de los entrepisos se consideran sólo para la determinación de las cargas laterales sísmicas estáticas, y se analizan sólo sus efectos torsionantes en el estado límite de falla plástica del sistema, por otro lado, no se considera en esta aplicación la contribución de las cargas verticales.

Bajo las tres primeras condiciones de carga se presenta el mismo mecanismo de falla plástica en el sistema estructural (ver figura 12), al formarse 42 plastificaciones en los elementos de los marcos paralelos al eje X (marcos 4, 5 y 6), donde el marco 6 determina dicho mecanismo de falla plástica del sistema estructural, al producirse también un mecanismo de falla plástica en este marco plano, cabe señalar que en los marcos 1, 2 y 3 no se presenta ninguna plastificación en los elementos. Los factores de incremento de carga, necesarios para la formación de este mecanismo son respectivamente: 1.919 para la primera condición de carga, 1.971 para la segunda y 1.869 para la tercera condición de carga. De estas tres combinaciones de carga, la más desfavorable resulta ser la tercera. Los desplazamientos obtenidos para cada una de estas combinaciones se muestran en la tabla 4. Como era de esperarse, los marcos más desfavorables al aplicar la carga en la dirección X son los marcos extremos 4 y 6, donde, por las diferencias de claros, el marco 6 es el marco que falla plásticamente primero en su plano de trabajo, y provoca el mecanismo de falla del sistema estructural. Por otro lado, la contribución de la carga adicional aplicada en la dirección Y, contribuye sólo en un 3 % en la disminución de la carga crítica del estado límite plástico de este sistema.

En este ejemplo, donde el tipo de mecanismo de falla plástica del sistema estructural resulta ser el mismo para las tres primeras combinaciones de carga consideradas, el mecanismo crítico para estas tres combinaciones es el producido con la tercera condición de carga. Como consecuencia, resulta ilustrativo analizar los desplazamientos de las losas (referenciados al origen del sistema de coordenadas global de la estructura, mostrado

en la figura 9), en especial los giros que determinan los efectos de torsión sobre el sistema estructural (ver tabla 4 y figura 13). Tomando como referencia la primera condición de carga, aplicada sólo en la dirección X del sistema, se producen principalmente fuerzas sísmicas laterales que absorben los marcos 4, 5 y 6, resultado principalmente de la distribución de la carga directa (aunque existe cierto porcentaje pequeño de carga producido por momento torsionante). Ahora bien, al incluir carga en la dirección Y del sistema, los marcos en la dirección X sufren diferencias en cuanto a las cargas laterales que absorben, diferencias que son producto del efecto de torsión en el sistema, como se observa en la tabla 4; en la segunda condición de carga los giros (y por tanto los efectos de torsión) son menores que los de la condición de carga 1, mientras que los giros en la condición de carga 3 son mayores, razón por la cual la tercera condición de carga produce el mecanismo crítico del sistema, con un factor de carga de 1.869.

Finalmente, con las condiciones de carga 4 y 5 se obtienen plastificaciones únicamente en los marcos 1, 2 y 3. En la condición de carga 4 se presenta el mecanismo de falla del sistema estructural después de 43 secciones plastificadas, siendo el marco 1 el que provoca la formación del mecanismo de falla plástica del sistema, con un factor de carga de 1.909. Al cambiar la dirección de la fuerza en Y (condición de carga 5) se obtiene un mecanismo de falla del sistema provocado por el marco 2, con un factor de carga también de 1.909, después de producirse 43 plastificaciones en el sistema. Las plastificaciones producidas en el sistema con estas dos condiciones de carga, así como los mecanismos de los marcos 1 y 2 se presentan en las figuras 14 y 15, respectivamente.

## CONCLUSIONES

La metodología presentada permite simplificar los análisis elastoplásticos de sistemas estructurales tipo edificios formados con marcos planos (donde los marcos trabajan en su plano) y losas rígidas, sometidos a torsión por sismo, por otro lado, permite identificar los estados límite de falla plástica del sistema estructural y las funciones que los representan.



La condición de plasticidad de los elementos estructurales bajo combinación de esfuerzos es linealizada y las funciones de estado de las secciones extremas de los elementos son expresadas como una combinación lineal de las resistencias de estas secciones extremas y de las cargas aplicadas. La hipótesis de linealidad en el dominio de resistencia no siempre es válida para todo tipo de estructuras; sin embargo, esta hipótesis de linealidad se justifica, tanto por la simplicidad en el cálculo de las funciones de estado límite como por su aproximación al comportamiento real de las estructuras para fines prácticos. El método simplifica la identificación de los estados límite de falla plástica del sistema estructural, estudiando por un lado los desplazamientos y giros de las losas provocados tanto por las fuerzas sísmicas como por las fuerzas constantes equivalentes producto de las plastificaciones de todos los marcos del sistema; así como los mecanismos de falla de los marcos en su plano de trabajo. Además de obtener el mecanismo crítico de colapso, el método permite identificar otros posibles mecanismos de falla.

Finalmente, cuando se conocen otros modos de falla de la estructura, identificados por ejemplo, por inspección, el método permite deducir fácilmente las funciones de estado límite asociadas a esos mecanismos, realizando un solo análisis de la estructura, con la carga inicial e identificando o definiendo los elementos plastificados. Se recomienda para futuros trabajos de aplicación de la metodología propuesta, realizar estudios paramétricos para una gama más amplia de estructuras que consideren diferentes criterios de falla plástica y determinar los índices de seguridad asociados a todos los casos estudiados.

### RECONOCIMIENTO

Este trabajo se desarrolló gracias al apoyo de las siguientes Instituciones: Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología, CONACYT, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UAQ y División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, UNAM.

### REFERENCIAS

- Arroyo, M. (1989), "Approche probabiliste du comportement élasto-plastique de structures marines sous sollicitations aléatoires de houle", Thèse de Doctorat de l'Ecole Nationale des Ponts et Chaussées, Paris, France.
- Arroyo, M., Guenard, Y., Jacob, B., y Lemaire, M. (1989), "Reliability analysis for offshore structures", 5th Int. Conf. on Structural Safety and Reliability, ICOSSAR'89, vol. I, pp 223-230, San Francisco, EUA.
- Arroyo, M. (1994), "Método de análisis matricial de estructuras, para la obtención de mecanismos de falla", IX Congreso Nacional de Ingeniería Estructural, vol. I, pp 269-279, Zacatecas, Zac, México.
- Damy, J. y Alcocer, S. (1987), "Obtención del Centro de Torsión de Edificios", VII Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica, vol. I, pp C.60-C.67, Querétaro, Qro, México.
- Meli, R. (1991), "Comentarios al título sexto: seguridad estructural de las construcciones, del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal", N° ES-1, Instituto de Ingeniería, UNAM, México.
- Galambos, T. V. y Ravindra, K. (1973), "Tentative load and resistance factor design criteria for steel buildings", Research report 18, Structural Division, Washington University, Saint Louis, EUA.
- Stenvenson, J. D. y Moses, F. (1970), "Reliability analysis of frame structures", Journal of the Structural Division, ASCE, 96ST11, EUA.
- Thoft-Christensen, P. y Murotsu, Y. (1986), "Application of structural systems reliability theory", Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg.
- Villarreal, C. (1997), "Análisis de confiabilidad de edificios sometidos a torsión por sismo", Tesis de licenciatura, FI-UNAM.

Tabla 1. Propiedades geométricas y mecánicas

ELEMENTO	ÁREA (m <sup>2</sup> )	INERCIA (m <sup>4</sup> )	Mp (Ton-m)
1 a 9 columnas	0.0375	0.0008280	133.61
10 a 15 trabes	0.0184	0.0002156	45.44

Tabla 2. Determinación de las fuerzas sísmicas

NIVEL	Wi (Ton)	hi (m)	Wi·hi (Ton·m)	Fi (Ton)
1	180	3.5	630	39.319
2	180	6.7	1206	75.268
3	135	9.9	1336.5	83.413
Σ	495	-	3172.5	-

Tabla 3. Combinaciones de carga que se aplican al sistema

Fuerza	Nivel	Condiciones de Carga				
		1	2	3	4	5
Fx	1	39.319	39.319	39.319	11.796	11.796
	2	75.268	75.268	75.268	22.580	22.580
	3	83.413	83.413	83.413	25.024	25.024
Fy	1	0	11.796	-11.796	39.319	-39.319
	2	0	22.580	-22.580	75.268	-75.268
	3	0	25.024	-25.024	83.413	-83.413
M	1	-225.652	-157.450	-293.856	159.648	295.039
	2	-431.963	-301.404	-562.524	305.611	564.789
	3	-478.707	-334.018	-623.394	338.681	625.904

Tabla 4. Desplazamientos de las losas

Nivel		Dx (m)			Dy (m)			Giros		
		1	2	3	1	2	3	1	2	3
Cond. de Carga	1	0,039716	0,087512	0,124054	0,004964	0,010268	0,015054	-1,61E-03	-3,42E-03	-4,94E-03
	2	0,040121	0,088362	0,125292	0,013268	0,030533	0,044829	-1,58E-03	-3,35E-03	-4,83E-03
	3	0,039279	0,086609	0,122745	-0,002913	-0,008952	-0,013184	-1,64E-03	-3,48E-03	-5,04E-03
	4	0,004733	0,011611	0,016919	0,052471	0,113776	0,161433	-1,86E-04	-4,53E-04	-7,09E-04
	5	-0,008769	-0,021184	-0,030942	0,050659	0,109254	0,154202	3,31E-04	8,60E-04	1,33E-03

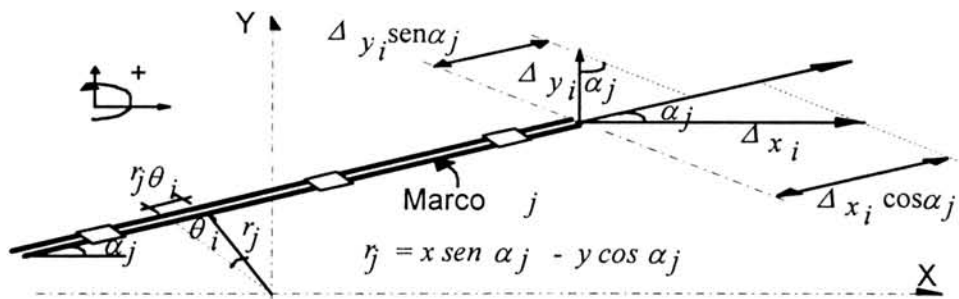


Fig 1. Sistemas de coordenadas locales y globales, en planta

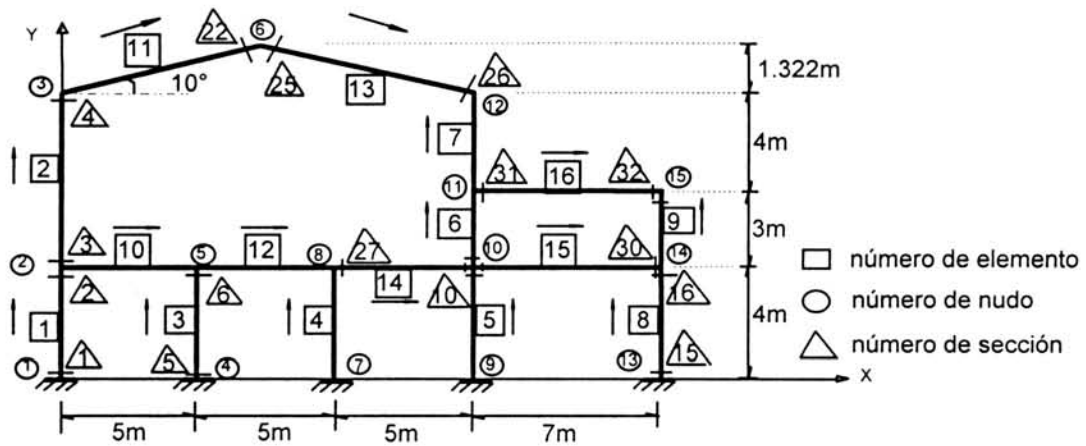


Fig 2. Estructura formada con elementos longitudinales tipo columna y viga



Fig 3. Fuerzas nodales equivalentes

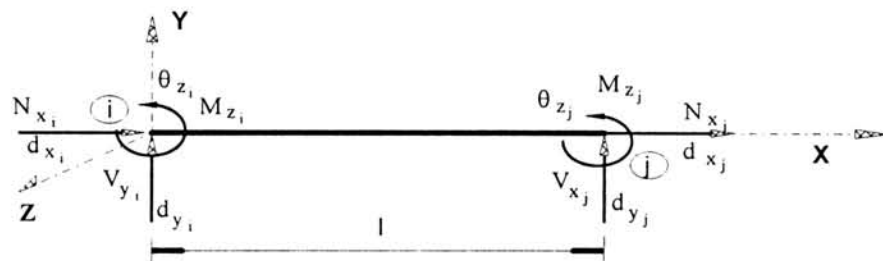


Fig 4. Fuerzas y desplazamientos de un elemento viga en el plano

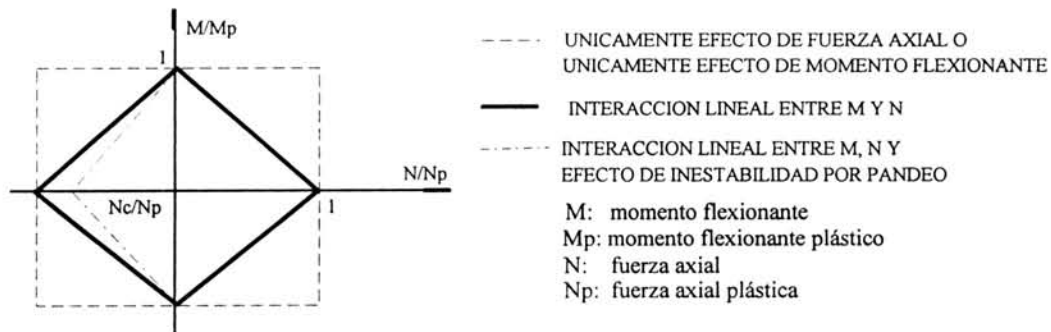


Fig 5 Diagrama de estado límite considerando la interacción del momento flexionante y la fuerza axial

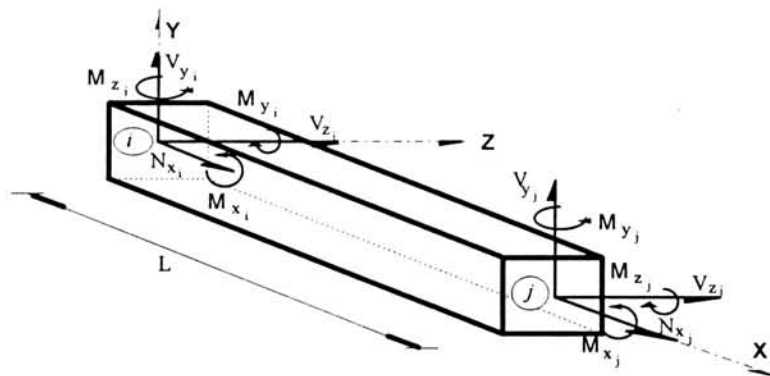


Fig 6 Fuerzas y desplazamientos de un elemento viga en el espacio

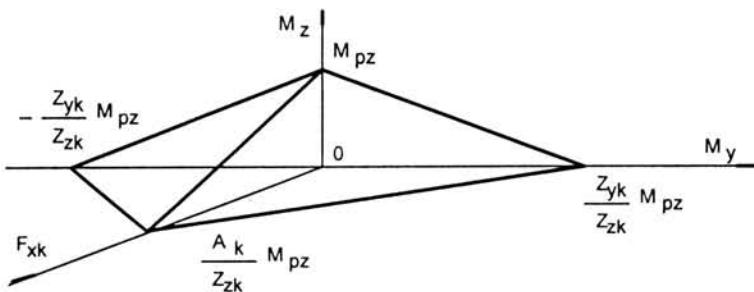


Fig 7 Linealización de la condición de plasticidad en el dominio de resistencia

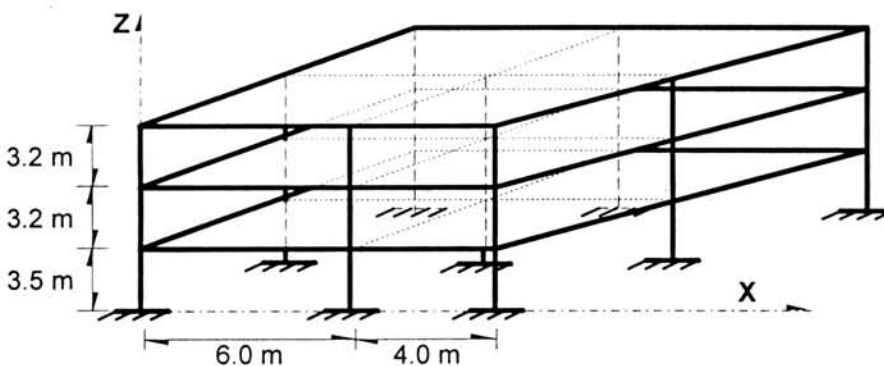


Fig 8 Estructura de tres niveles

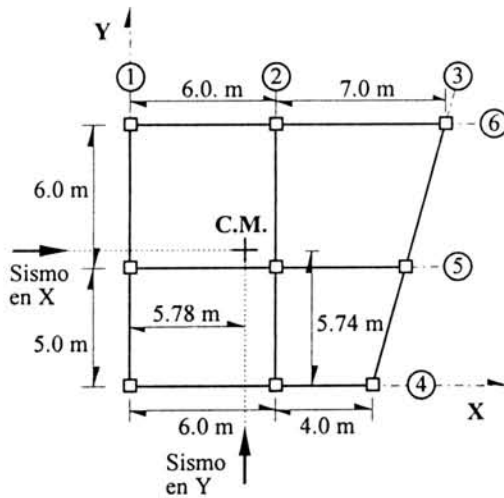


Fig 9. Planta de la estructura

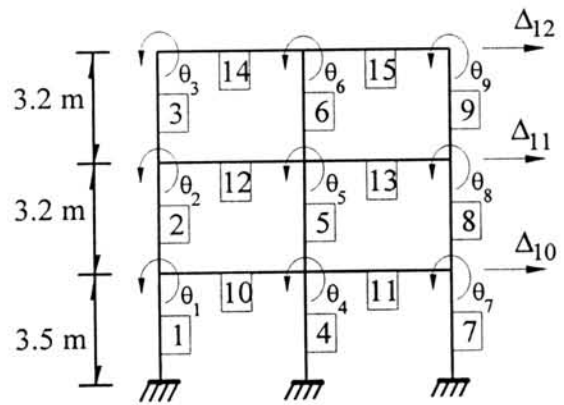


Fig 10. Marco plano tipo

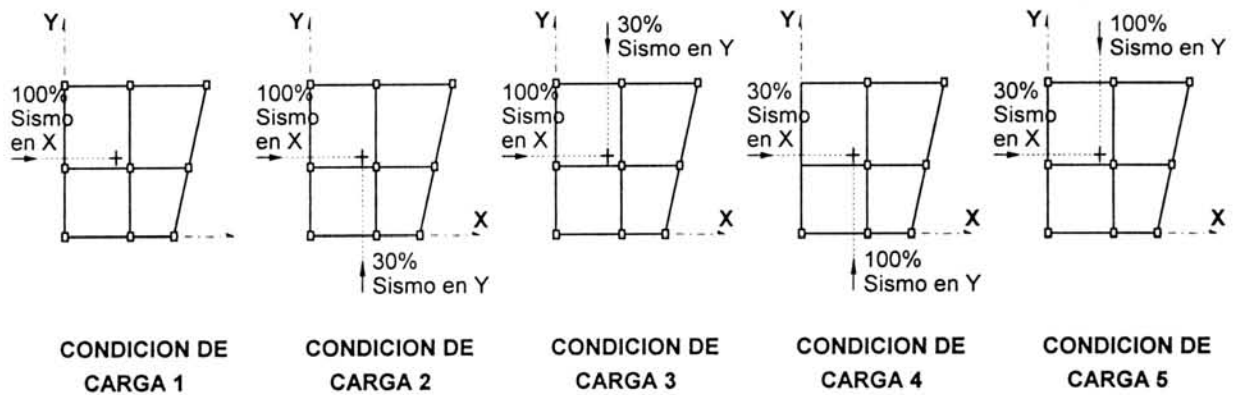


Fig 11. Condiciones de carga

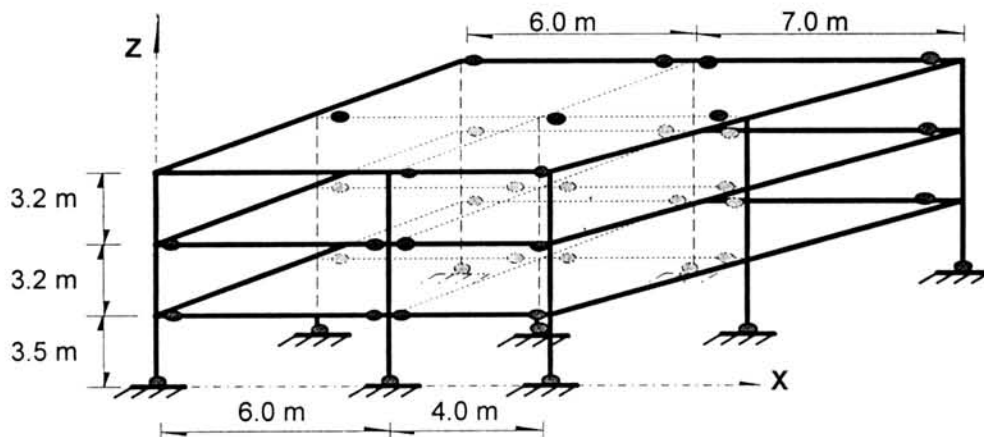


Fig 12. Plastificaciones resultantes en los marcos 1, 2 y 3, para las tres primeras condiciones de carga



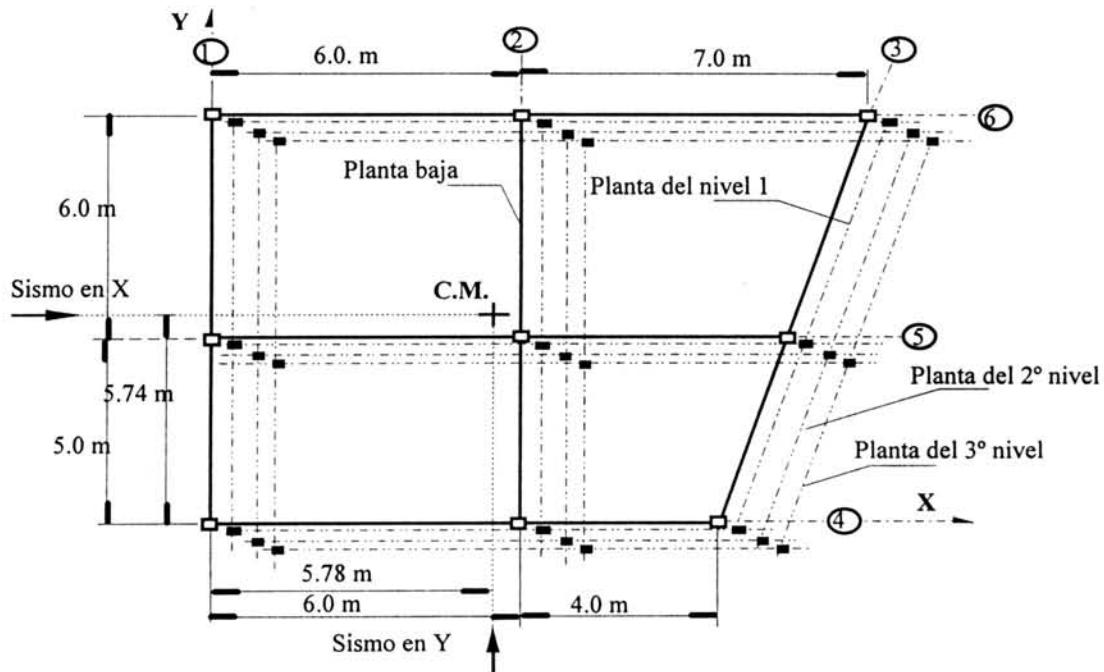


Fig 13. Deformada en planta de la estructura, para la condición de carga crítica (carga 3)

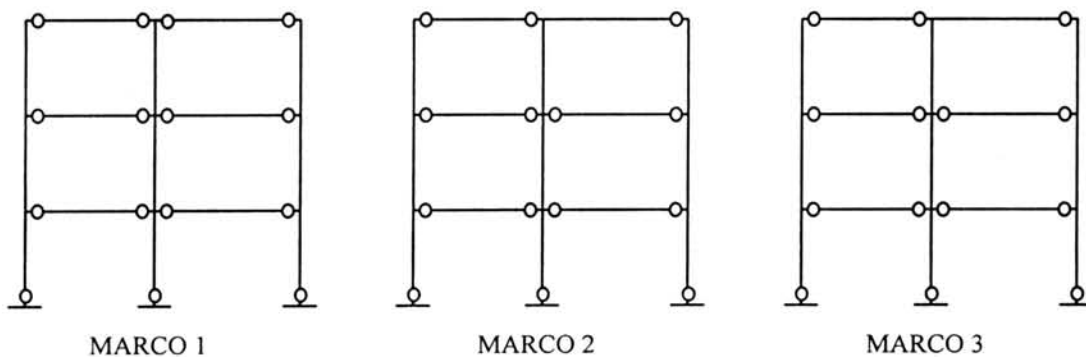


Fig 14. Plastificaciones resultantes en los marcos, para la condición de carga 4

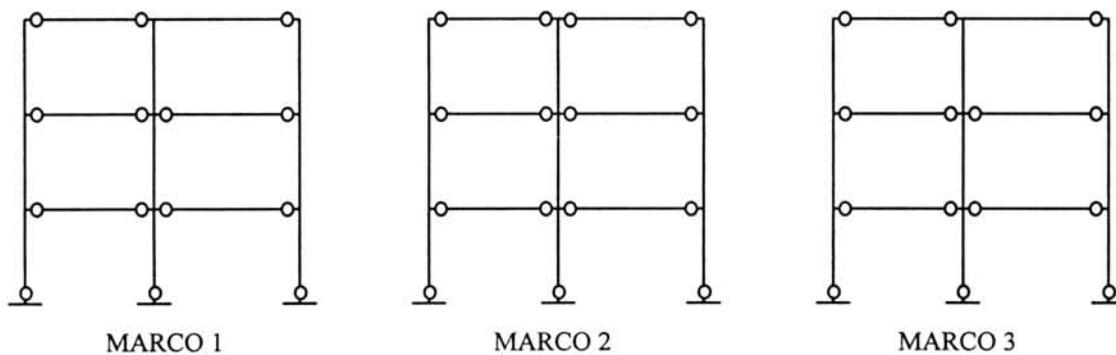


Fig 15. Plastificaciones resultantes en los marcos 1, 2 y 3, para la condición de carga 5